

FUNDAMENTALS
OF PLASMA PHYSICS
AND CONTROLLED
FUSION

Kenro Miyamoto

Кенро Миямото

ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ И УПРАВЛЯЕМОГО СИНТЕЗА

Перевод с английского
под общей редакцией академика В.Д. ШАФРАНОВА

Редакторы перевода
д. ф.-м. н. В.В. АРСЕНИН и д. ф.-м. н. В.И. ИЛЬГИСОНИС



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 533.9
ББК 22.33, 31.49
М 71

Миямото К. **Основы физики плазмы и управляемого синтеза** / Перевод с англ. под общей ред. В.Д. Шафранова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 424 с. — ISBN 978-5-9221-0838-6.

Книга представляет собой современный, но уже хорошо зарекомендовавший себя учебник по основам физики высокотемпературной плазмы и управляемого термоядерного синтеза. Затронуты все базовые разделы физики плазмы, знание которых необходимо для успешной работы в области термоядерных исследований как экспериментатору, так и теоретику. Рассмотрение проведено всеми используемыми в физике плазмы средствами — на языке движения отдельных частиц, при помощи аппарата магнитной гидродинамики и кинетической теории. Значительная часть книги посвящена особенностям поведения плазмы в установках токамак, включая вопросы равновесия плазмы в магнитном поле, и описанию типичных для плазмы токамака неустойчивых мод и способов неиндукционного нагрева плазмы, что выгодно отличает данную книгу от имеющихся аналогов. Также описаны альтернативные системы магнитного удержания плазмы и принципы инерционного удержания; кратко изложена история мировых термоядерных исследований.

Для студентов, аспирантов, преподавателей вузов и научных работников, специализирующихся в физике высокотемпературной плазмы.

Учебное издание

МИЯМОТО Кенро

ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ И УПРАВЛЯЕМОГО СИНТЕЗА

Редактор *А.М. Садовский*

Оригинал-макет: *А.М. Садовский*

Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 19.03.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 26,5. Тираж 700 экз. Заказ № 1286

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ППП «Типография «Наука»

121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-0838-6



9 785922 108386

ISBN 978-5-9221-0838-6 (русск.)

ISBN 4-000000-01-X (англ.)

© ФИЗМАТЛИТ, 2007 (русск.)

© К. Миямото, 2001 (англ.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора русского издания	10
Предисловие	12
Глава 1. Что такое плазма	15
§ 1.1. Введение	15
§ 1.2. Квазинейтральность и затухание Ландау	18
§ 1.3. Термоядерная плазма	20
Глава 2. Характеристики плазмы	25
§ 2.1. Функция распределения в пространстве скоростей, электронная и ионная температуры	25
§ 2.2. Плазменная частота, дебаевская длина	27
§ 2.3. Циклотронная частота, ларморовский радиус	28
§ 2.4. Дрейфовая скорость ведущего центра	29
§ 2.5. Магнитный момент, пробочное удержание, продольный адиабатический инвариант	32
§ 2.6. Время кулоновских столкновений, инжекция быстрых нейтральных атомов	35
§ 2.7. Убегающие электроны, поле Драйзера	41
§ 2.8. Электрическое сопротивление, омический нагрев	42
§ 2.9. Многообразии временных и пространственных масштабов в плазме	43
Глава 3. Конфигурации магнитного поля и траектории частиц	45
§ 3.1. Уравнения Максвелла	45
§ 3.2. Магнитная поверхность	48
§ 3.3. Уравнение движения заряженной частицы	49
§ 3.4. Траектория заряженной частицы в осесимметричной системе	52
§ 3.5. Дрейф ведущего центра в тороидальном поле	54
3.5a. Траектория ведущего центра пролетной частицы (56). 3.5b. Траектория ведущего центра запертой частицы (57).	
§ 3.6. Траектория ведущего центра и магнитная поверхность	59
§ 3.7. Влияние продольного электрического поля на банановые орбиты	60
Глава 4. Функция распределения в пространстве скоростей и уравнение Больцмана	62
§ 4.1. Фазовое пространство и функция распределения	62
§ 4.2. Уравнения Больцмана и Власова	63
Глава 5. Плазма как проводящая жидкость	67
§ 5.1. Уравнения двухжидкостной магнитной гидродинамики	67
§ 5.2. Одножидкостная магнитная гидродинамика	70
§ 5.3. Упрощенные МГД уравнения	72
§ 5.4. Магнитозвуковые волны	74

Глава 6. Равновесие	78
§ 6.1. Баланс давлений	78
§ 6.2. Уравнения равновесия для систем с осевой и трансляционной симметриями	80
§ 6.3. Равновесие в токамаке [1]	83
§ 6.4. Полоидальное поле и равновесие плазмы в токамаке	89
§ 6.5. Предел по параметру β	93
§ 6.6. Ток Пфирша—Шлютера [3]	95
§ 6.7. Теорема вириала	97
Глава 7. Диффузия плазмы, время удержания	101
§ 7.1. Столкновительная (классическая) диффузия	103
7.1a. Магнитогидродинамическое описание (103).	
7.1b. Приближение отдельных частиц (105).	
§ 7.2. Неоклассическая диффузия электронов в токамаке	106
§ 7.3. Потери на флуктуациях, бомовская диффузия и конвективные потери	109
§ 7.4. Потери на флуктуациях магнитного поля	113
Глава 8. Магнитогидродинамические неустойчивости	115
§ 8.1. Перестановочная, сосисочная и винтовая неустойчивости	116
8.1a. Перестановочная неустойчивость (116). 8.1b. Критерий устойчивости перестановочной моды, магнитная яма (120). 8.1c. Сосисочная неустойчивость (перетяжки) (124). 8.1d. Винтовая неустойчивость (змейки) (124).	
§ 8.2. Устойчивость в магнитной гидродинамике	126
8.2a. Линеаризация магнитогидродинамических уравнений (126). 8.2b. Энергетический принцип [5] (129).	
§ 8.3. Неустойчивости цилиндрической плазмы	133
8.3a. Неустойчивости плазмы с резкой границей: критерий Крускала—Шафранова (133). 8.3b. Неустойчивости плазмы с диффузной границей (137). 8.3c. Критерий Сайдема (142). 8.3d. Конфигурация токамака (143). 8.3e. Пинч с обращенным полем [12] (145).	
§ 8.4. Магнитогидродинамическое уравнение Хайна—Люста	150
§ 8.5. Баллонная неустойчивость	152
§ 8.6. Моды, связанные с градиентами плотности и температуры	156
Глава 9. Резистивная неустойчивость	160
§ 9.1. Тиринг-неустойчивость	161
§ 9.2. Резистивная дрейфовая неустойчивость	166
Глава 10. Распространение электромагнитных волн в плазме	172
§ 10.1. Дисперсионное уравнение волн в холодной плазме	173
§ 10.2. Свойства волн	177
10.2a. Поляризация и движение частиц (177). 10.2b. Явления отсечки и резонанса (178).	

§ 10.3. Волны в двухкомпонентной плазме	179
§ 10.4. Типы волн.	184
10.4а. Альфвеновские волны (184). 10.4б. Ионные циклотронные и быстрые магнитозвуковые волны (185). 10.4с. Нижнегибридный резонанс (187). 10.4d. Верх- негибридный резонанс (189). 10.4е. Электронные циклотронные волны (189).	
§ 10.5. Электростатические волны.	190
Глава 11. Затухание Ландау и циклотронный резонанс . . .	193
§ 11.1. Затухание Ландау и резонансная раскачка	193
§ 11.2. Времяпролетное затухание	197
§ 11.3. Циклотронное затухание.	198
§ 11.4. Квазилинейная теория эволюции функции распределения	201
Глава 12. Распространение волн и волновой нагрев	204
§ 12.1. Поток энергии.	205
§ 12.2. Приближение геометрической оптики	209
§ 12.3. Тензор диэлектрической проницаемости, поглощение волн и нагрев	210
§ 12.4. Ионный циклотронный нагрев.	217
§ 12.5. Нижнегибридный нагрев.	221
§ 12.6. Электронный циклотронный нагрев.	225
Глава 13. Кинетические (потенциальные) неустойчивости	229
§ 13.1. Дисперсионное уравнение для электростатических волн. .	229
§ 13.2. Двухпотоковая неустойчивость	231
§ 13.3. Неустойчивость электронного пучка	232
§ 13.4. Неустойчивость Харриса	233
Глава 14. Неустойчивости, вызванные высокоэнергичными частицами	237
§ 14.1. Фишбон-неустойчивость	237
14.1а. Формулировка подхода (237). 14.1б. МГД состав- ляющая потенциальной энергии (238). 14.1с. Энергия горячей компоненты (241). 14.1d. Инкремент фишбон- неустойчивости (244).	
§ 14.2. ТАЕ-моды	247
14.2а. Собственные альфвеновские моды, индуцирован- ные тороидальностью (248). 14.2б. Неустойчивость ТАЕ- мод, вызванная быстрыми частицами (253). 14.2с. Раз- личные альфвеновские моды (261).	
Глава 15. История термоядерных исследований.	264
Глава 16. Токамак	277
§ 16.1. Установки токамак	277
§ 16.2. Равновесие	281
16.2а. Случай проводящего кожуха (282). 16.2б. Случай отсутствия кожуха (282). 16.2с. Предельное равновесное значение бета для токамака с вытянутым сечением (283).	

§ 16.3. МГД устойчивость и предел по плотности	284
§ 16.4. Предел по бета для плазмы вытянутого сечения	286
§ 16.5. Контроль за примесями, приграничный слой и дивертор	288
§ 16.6. Скейлинг L-моды	294
§ 16.7. H-мода и режимы с улучшенным удержанием.	297
§ 16.8. Неиндукционное возбуждение тока	305
16.8a. Возбуждение тока нижегибридными волнами (305). 16.8b. Возбуждение тока электронными циклотронными волнами (309). 16.8с. Нейтральная инжекция и возбуждение тока (312). 16.8d. Бутстрэп-ток (315).	
§ 16.9. Неоклассическая тиринг-мода	317
§ 16.10. Моды резистивного кожуха	324
16.10a. Инкремент моды резистивного кожуха (324).	
16.10b. Стабилизация обратной связью (331).	
§ 16.11. Параметры токамака—реактора	333
Глава 17. Альтернативные системы удержания	343
§ 17.1. Пинч с обращенным полем	343
17.1a. Конфигурация пинча с обращенным полем (343).	
17.1b. МГД релаксация (344). 17.1с. Удержание (348).	
17.1d. Поддержание тока переменным полем (349).	
§ 17.2. Стелларатор	350
17.2a. Винтовое поле (350). 17.2b. Стеллараторные установки (354). 17.2с. Неоклассическая диффузия в винтовом поле (355). 17.2d. Удержание плазмы в стеллараторах [37,38,39] (359).	
§ 17.3. Открытые системы	361
17.3a. Время удержания в пробочных ловушках и каспах (362). 17.3b. Эксперименты по удержанию плазмы в пробочных ловушках (364). 17.3с. Неустойчивости в пробочных ловушках (365). 17.3d. Амбиполярные ловушки (368).	
Глава 18. Инерционное удержание	375
§ 18.1. Условие поджига [1, 2]	376
§ 18.2. Имплотация	379
Приложение А. Вывод уравнений МГД	384
Приложение В. Интеграл энергии для осесимметричных тороидальных систем	389
§ В.1. Интеграл энергии в наглядной форме	389
§ В.2. Интеграл энергии для осесимметричных тороидальных систем	392
§ В.3. Интеграл энергии для баллонных мод с высокими значениями n	397
Приложение С. Вывод тензора диэлектрической проницаемости горячей плазмы	400
§ С.1. Дисперсионное уравнение для горячей плазмы.	400

§ С.2. Решение линеаризованного уравнения Власова	402
§ С.3. Тензор диэлектрической проницаемости горячей плазмы	404
§ С.4. Тензор диэлектрической проницаемости би-максвеллов- ской плазмы	407
§ С.5. Закон дисперсии электростатических волн	409
§ С.6. Закон дисперсии электростатических волн в неоднородной плазме	410
Физические константы, плазменные величины и математические формулы	415
Предметный указатель	419

Предисловие редактора русского издания

Представляемая вниманию российского читателя книга почетного профессора Токийского университета Кенро Миямото не имеет аналогов на русском языке. Основное ее предназначение — служить базовым учебником для студентов и аспирантов, специализирующихся в области физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза. По объему материала и уровню изложения эта книга способна удовлетворить самого любознательного студента, а также служить «первой помощью» научным сотрудникам, интересующимся этой областью физики или начинающим работать в ней. Немаловажно и то, что в соответствии с принятыми сейчас нормами все формулы в книге даются в международной системе единиц СИ.

Появление такого учебника-справочника именно сейчас особенно оправдано, если учесть, что в течение 7–10 лет России необходимо подготовить команду молодых физиков и инженеров для работы на первом международном токамаке—реакторе ИТЭР. В ближайшие годы следует, по-видимому, ожидать выхода на термоядерный уровень параметров и установок инерционного синтеза, в частности, современных Z-пинчей. Вот почему я полагаю, что эта книга найдет своего читателя.

Перевод выполнен по второму английскому изданию. Профессор К. Миямото любезно предоставил нам электронную версию книги, а также список замеченных опечаток. Все они, а также некоторые другие, обнаруженные при переводе, были исправлены в русском издании. Оригинальное авторское изложение материала весьма лаконично. Мы сочли возможным в некоторых местах, где это представлялось желательным с точки зрения русского языка и логики, слегка расширить поясняющий текст и переставить некоторые формулы, сохранив при этом авторские стиль и манеру изложения. Ссылки на переводные русские источники заменены нами на оригинальные.

Перевод книги был в порядке инициативы выполнен сотрудниками Института ядерного синтеза Российского научного центра «Курчатовский институт»: С. В. Базденков перевел главы 8,

13, 14, 16, А. В. Звонков — главу 3 и главы 10–12, В. И. Ильгисонис — предисловие, главы 1, 2, 5, Приложение В, список формул и предметный указатель, Ю. И. Поздняков — главу 6, А. А. Скворода — главу 17, И. В. Хальзов — главы 7–9, Д. А. Шуваев — главы 4, 15, 18, Приложения А и С.

Редактирование перевода выполнено докторами физико-математических наук В. В. Арсениным и В. И. Ильгисонисом. В тех местах, где русская и английская терминология заметно различаются, а также там, где, на наш взгляд, были необходимы более подробные разъяснения, такие разъяснения были добавлены редакторами перевода в виде подстраничных примечаний.

Русское издание книги финансировалось Российским фондом фундаментальных исследований. Этой финансовой поддержкой мы во многом обязаны вниманию, которое уделил данной книге академик Ю. М. Каган, за что приношу ему свою искреннюю благодарность.

Академик В. Д. Шафранов

Предисловие

Эта книга была задумана как базовый учебник для студентов, специализирующихся в области физики плазмы и управляемого термоядерного синтеза. Второе ее предназначение — служить справочником по аналитическим методам физики плазмы для научных работников. Книга основана на курсе лекций, который автор читает на физическом факультете Токийского университета.

В гл. 1 и 2 разъясняется, что такое плазма, описываются ее основные характеристики. В гл. 3 дается описание траекторий ионов и электронов в различных магнитных конфигурациях. Уравнение Больцмана для функции распределения в пространстве скоростей, которое служит основой кинетической теории плазмы, формулируется в гл. 4.

Главы с 5 по 9 посвящены магнитогидродинамическому (МГД) описанию плазмы как проводящей жидкости. В рамках такой жидкостной модели формулируется МГД уравнение движения (гл. 5), излагается теория равновесия (гл. 6), вводятся понятия диффузии и времени удержания плазмы (гл. 7). Проблема МГД неустойчивости, т. е. исследование вопроса, будет ли малое возмущение нарастать со временем, разрушая плазменную конфигурацию, или релаксировать к устойчивому состоянию, обсуждается в гл. 8 и 9. При этом исходное МГД уравнение движения получается путем надлежащего осреднения уравнения Больцмана; соответствующая математическая процедура описана в Приложении А. Вывод полезного выражения для интеграла энергии в осесимметричной тороидальной геометрии и анализ баллонных мод с высокими n дан в Приложении В.

Кинетическая теория плазмы рассматривается в гл. 10–14. По отношению к распространяющимся волнам и возмущениям плазма представляет собой сплошную среду, в общем случае неоднородную и анизотропную, способную поглощать или усиливать эти волны. Модель холодной плазмы, применимая, когда тепловая скорость частиц плазмы много меньше фазовой скорости волны, обсуждается в гл. 10. Тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы довольно прост и может быть

легко выведен, что позволяет анализировать различные типы волн. Если же показатель преломления увеличивается и фазовая скорость волны становится сравнимой с тепловой скоростью частиц плазмы, то частицы будут взаимодействовать с волной. В гл. 11 описано затухание Ландау — наиболее характерное коллективное явление в плазме, а также циклотронное затухание. Волновой нагрев (поглощение волн) для случая, когда тепловая скорость частиц плазмы сравнима с фазовой скоростью волны, обсуждается в гл. 12 с использованием тензора диэлектрической проницаемости горячей плазмы. В гл. 13 описывается усиление волн, т. е. рост возмущений (неустойчивости). Довольно кропотливый математический вывод тензора диэлектрической проницаемости горячей плазмы отнесен в Приложение С. Неустойчивости, связанные с энергичными частицами (фишбон-неустойчивость, ТАС-моды), рассмотрены в гл. 14.

В небольшой гл. 15 изложена история термоядерных исследований. В последнее десятилетие наблюдался значительный прогресс в экспериментах на токамаках, в результате чего активно разрабатываемые проекты токамака—реактора стали довольно реалистичны. В гл. 16 разъясняются ключевые проблемы физики плазмы в токамаках, включая будущий реактор. Альтернативные токамаку системы удержания, такие как пинч с обращенным полем, стелларатор, амбиполярная ловушка, описываются в гл. 17. В гл. 18 дается элементарное введение в принципы инерционного удержания.

Читателя может удивить обилие математических выкладок, что не вполне типично для лекционного курса. На это есть причины, одна из которых заключается в следующем. Если студент старших курсов пытается, к примеру, прочесть и понять три часто цитируемые короткие работы Коннора, Хасты и Тэйлора по баллонным модам, Чена, Вайта и Розенблюта по фишбон-неустойчивости, Бетти и Фрайдберга по ТАС-модам, не обладая необходимыми предварительными знаниями, ему придется разобраться в нескольких десятках цитируемых работ, а также в работах, на которые ссылаются цитируемые авторы. По моему опыту, для этого потребуется несколько месяцев напряженной работы. Изложенный же в книге материал избавляет читателей от необходимости тратить время на самостоятельный вывод основополагающих формул, освобождая его для более глубоких физических размышлений и вдумчивого анализа экспериментальных данных.

В этих лекционных записках сделана попытка представить физические основы и математические методы, необходимые для понимания и предсказания поведения плазмы, а также изложить состояние дел в термоядерных исследованиях на языке, понятном студентам и аспирантам. Я также надеюсь, что книга будет служить полезным справочником для ученых и инженеров, работающих в смежных областях.

Май 2001

Кенро Миямото

почетный профессор Токийского университета

miyamoto@phys.s.u-tokyo.ac.jp

Глава 1

ЧТО ТАКОЕ ПЛАЗМА

§ 1.1. Введение

С ростом температуры состояние вещества изменяется от твердого к жидкому, а затем — к газообразному. Если температура продолжает увеличиваться, заметное количество атомов газа ионизуется, и возникает новое высокотемпературное состояние с примерно равным числом положительных ионов и электронов, так что на макроскопических масштабах выполняется условие зарядовой нейтральности.

В своем коллективном движении электроны и ионы взаимодействуют посредством дальнедействующих кулоновских сил, спадающих лишь пропорционально обратному квадрату расстояния r между заряженными частицами. Движение заряженных частиц приводит к возникновению электрических токов и магнитных полей, так что на частицы действуют еще и силы Лоренца. Таким образом, большое количество заряженных частиц взаимодействует между собой посредством дальнедействующих сил, и в таком газовом состоянии возникают различные коллективные движения и процессы, типичными примерами которых могут служить многочисленные неустойчивости и волновые явления. В физике слово «плазма» как раз и используется для обозначения высокотемпературного состояния ионизованного газа, характеризующегося зарядовой нейтральностью и коллективным взаимодействием заряженных частиц и волн.

Если температура газа равна T (К), то средняя скорость теплового движения (тепловая скорость) v_T определяется соотношением

$$mv_T^2/2 = \kappa T/2, \quad (1.1)$$

где $\kappa = 1,380658(12) \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана, а величина κT , обозначает тепловую энергию, которая в системе СИ измеряется в джоулях (Дж). Во многих областях физики в качестве единицы энергии часто используют электрон-вольт (эВ). Один эВ равен энергии, необходимой электрону с зарядом $e = 1,60217733(49) \cdot 10^{-19}$ Кл, чтобы преодолеть разность потенциалов в один вольт:

$$1 \text{ эВ} = 1,60217733(49) \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Температура, соответствующая тепловой энергии в 1 эВ, равна $1,16 \cdot 10^4$ К, ($= e/\kappa$). Энергия ионизации атома водорода равна 13,6 эВ. Даже если тепловая (средняя) энергия водородного газа составляет 1 эВ, что отвечает температуре $T \sim 10^4$ К, то в нем присутствует очень малое количество электронов с энергией выше 13,6 эВ, способных ионизировать водород, превращая газ в водородную плазму.

Плазма встречается в природе в весьма различных формах (см. рис. 1.1). Так, на высотах 70–500 км от Земли существует ионосфера (плотность которой, точнее, концентрация частиц $n \sim 10^{12} \text{ м}^{-3}$, а тепловая энергия $\kappa T \sim 0,2$ эВ). Солнечный ветер представляет собой зародившийся на Солнце поток плазмы с параметрами $n \sim 10^6\text{--}10^7 \text{ м}^{-3}$, $\kappa T \sim 10$ эВ. Вокруг Солнца имеется солнечная корона, плотность плазмы в которой $\sim 10^{14} \text{ м}^{-3}$, а электронная температура ~ 100 эВ; эти значения могут несколько различаться в зависимости от местоположения. Плотность электронов белого карлика, конечной стадии эволюции звезды, составляет примерно $10^{35}\text{--}10^{36} \text{ м}^{-3}$. Различные типы плазмы представлены на рис. 1.1, на диаграмме плотность $n(\text{м}^{-3})$ — температура $\kappa T(\text{эВ})$ электронов. Активные исследования в области физики плазмы в значительной степени обусловлены проблемой термоядерного синтеза, для решения которой необходимо создать и удержать «горячую» плазму. Плазма играет важную роль в физике таких астрофизических явлений, как микроволновое излучение пульсаров или солнечные рентгеновские источники. Примерами практического применения физики плазмы могут служить магнитогидродинамическое (МГД) преобразование энергии на электростанциях, ионные ракетные двигатели космических кораблей и привлекающие в последнее время внимание процессы плазменной обработки материалов. Другим практическим приложением физики плазмы служит изучение околоземного пространства.

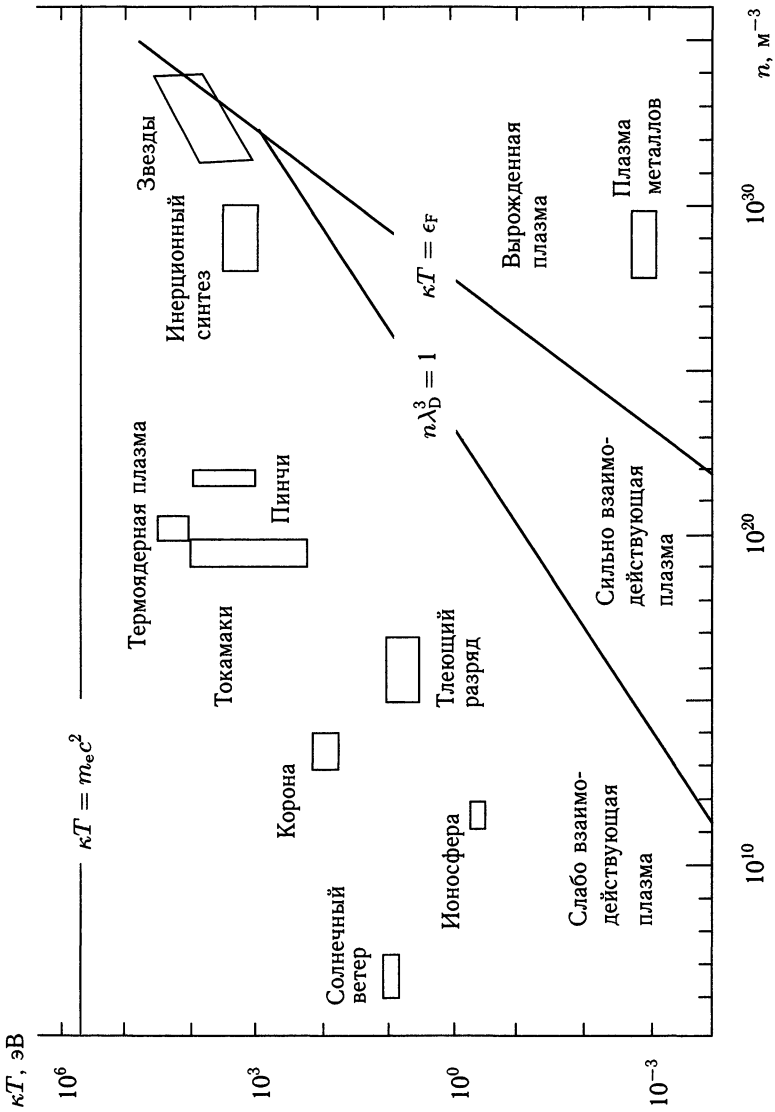


Рис. 1.1. Различные типы плазмы на n — κT диаграмме

§ 1.2. Квазинейтральность и затухание Ландау

Одно из фундаментальных свойств плазмы — экранирование приложенного к плазме электрического потенциала. Если в плазму вставить зонд и приложить к нему положительный (отрицательный) потенциал, то электроны плазмы будут притягиваться к нему (отталкиваться от него). Таким способом плазма стремится экранировать вносимое в нее электростатическое возмущение. Оценим характерную длину экранирования. Предположим, что плотность ионов однородна ($n_i = n_0$) и что имеется слабое возмущение электронной плотности n_e или потенциал ϕ . Поскольку электроны обычно распределены по Больцману, их плотность n_e определяется следующим образом:

$$n_e = n_0 \exp(e\phi/\kappa T_e) \approx n_0(1 + e\phi/\kappa T_e).$$

Используем уравнение Пуассона:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi, \quad \nabla(\epsilon_0\mathbf{E}) = -\epsilon_0\nabla^2\phi = \rho = -e(n_e - n_0) = -\frac{e^2 n_0}{\kappa T_e} \phi,$$

или

$$\nabla^2\phi = \frac{\phi}{\lambda_D^2}, \quad \lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 \kappa T_e}{n_e e^2}\right)^{1/2} = 7,45 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{n_e} \frac{\kappa T_e}{e}\right)^{1/2} \text{ (м)}, \quad (1.2)$$

где n_e измеряется в м^{-3} , а $\kappa T_e/e$ — в эВ. Если $n_e \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $\kappa T_e/e \sim 10$ кэВ, то $\lambda_D \sim 75$ мкм. В сферически симметричном случае лапласиан $\nabla^2\phi$ превращается в $(1/r^2)(\partial/\partial r)(r^2\partial\phi/\partial r)$, и решение уравнения Лапласа имеет вид

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\exp(-r/\lambda_D)}{r}.$$

Из этой формулы видно, что кулоновский потенциал точечного заряда $q/4\pi\epsilon_0 r$ экранируется на расстоянии λ_D , называемом *дебаевской длиной*, или *дебаевским радиусом*. Если размер плазмы a много больше дебаевской длины, $a \gg \lambda_D$, то плазма считается квазинейтральной. Если, наоборот, $a < \lambda_D$, то поле отдельной частицы электростатически не экранируется. Это состояние — уже не плазма, а просто набор независимых заряженных частиц. Число электронов в сфере с радиусом порядка дебаевского

$$n\lambda_D^3 = \left(\frac{\epsilon_0 \kappa T_e}{e}\right)^{3/2} \frac{1}{n_e^{1/2}}$$

называется *параметром идеальности*. Если плотность плазмы увеличивается, а температура остается постоянной, то параметр

идеальности уменьшается. Если он станет меньше, чем, скажем, единица, то концепция дебаевского экранирования будет неприменима, поскольку на размерах масштаба дебаевского радиуса нарушится непрерывность плотности электрического заряда. В области значений параметра $n\lambda_D^3 > 1$ плазма называется классической, или *слабо взаимодействующей*, поскольку отношение тепловой энергии электронов κT_e к энергии кулоновского взаимодействия $E_{\text{Coulomb}} = e^2/4\pi\epsilon_0 d$ (здесь $d \approx n^{-1/3}$ — среднее расстояние между электронами с плотностью n) равно

$$\frac{\kappa T_e}{E_{\text{Coulomb}}} = 4\pi(n\lambda_D^3)^{2/3}, \quad (1.4)$$

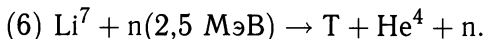
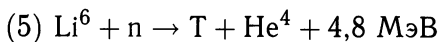
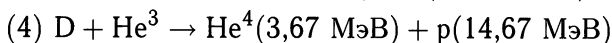
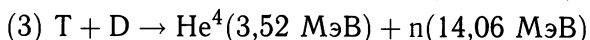
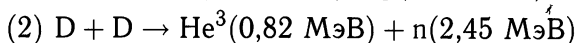
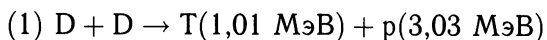
и условие $n\lambda_D^3 > 1$ означает, что кулоновская энергия много меньше тепловой. В случае $n\lambda_D^3 < 1$ плазма называется *сильно взаимодействующей* (см. рис. 1.1). Когда плотность очень высока, энергия Ферми вырожденного электронного газа, задаваемая выражением $\epsilon_F = (h^2/2m_e)(3\pi^2n)^{2/3}$, может превысить тепловую, $\epsilon_F \geq \kappa T_e$. Это означает, что квантовые эффекты начинают доминировать над тепловыми — возникает *вырожденная электронная плазма*, одним из примеров которой служит электронная плазма в металлах. В большинстве же экспериментов плазма ведет себя как классическая и слабо взаимодействующая.

Коллективные явления в поведении заряженных частиц отражают другое фундаментальное свойство плазмы. К примеру, с когерентным движением заряженных частиц связано возникновение волн. Если фазовая скорость v_{ph} волны или возмущения много больше тепловой скорости v_T частиц, то волна распространяется через плазменную среду без затухания или усиления. Однако если показатель преломления N плазменной среды становится большим, а плазма — горячей, фазовая скорость электромагнитной волны $v_{\text{ph}} = c/N$ (c — скорость света) и тепловая скорость v_T оказываются сопоставимы ($v_{\text{ph}} = c/N \sim v_T$), так что возникает возможность обмена энергией между волной и частицами плазмы. Специфический механизм затухания волны был обнаружен Л. Д. Ландау. Затухание Ландау подразумевает прямое взаимодействие волна—частица в бесстолкновительной плазме и не требует случайных столкновений. Это явление — фундаментальный механизм нагрева плазмы волнами (при затухании волн) и развития неустойчивостей (при обратном процессе раскачки возбуждений). Затухание Ландау будет описано в гл. 11, 12 и Приложении С.

§ 1.3. Термоядерная плазма

Прогресс в физике плазмы в значительной мере связан с задачей получения термоядерной плазмы. Необходимые для решения этой задачи условия обсуждаются в настоящем разделе. Ядерные реакции синтеза — это реакции слияния легких ядер с образованием более тяжелых. Если сумма масс ядер, образовавшихся в результате реакции, меньше суммы масс ядер, вступивших в реакцию, на величину Δm , называемую дефектом массы, то, согласно теории относительности, при такой реакции высвобождается $(\Delta m)c^2$ энергии (здесь c — скорость света).

Для использования в реакторах синтеза интерес представляют следующие реакции:



Здесь D означает дейтон, T — тритон, He^3 — ядро гелия-3, Li — ядро лития, p — протон (ион водорода) и n — нейтрон ($1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}$). По сравнению с энергией, равной 2,96 эВ, выделяющейся в химической реакции $H_2 + (1/2)O_2 \rightarrow H_2O$, энергия, высвобождающаяся в реакциях ядерного синтеза, примерно в миллион раз больше. Энергия связи на один нуклон в атомном ядре невелика для очень легких или очень тяжелых ядер и имеет максимум для ядер с массовым числом около 60, поэтому в реакциях синтеза легких ядер высвобождается большое количество энергии. Дейтерий широко распространен в природе, к примеру, в морской воде объемом $1,35 \cdot 10^9 \text{ км}^3$ его содержится 0,015% от общего числа атомов водорода.

Реакции ядерного синтеза были открыты в 1920 г. Хотя взрывное высвобождение энергии в реакциях ядерного синтеза было реализовано уже в 1951 г. (в виде водородной бомбы), управляемый ядерный синтез до сих пор находится в стадии исследовательских разработок. Следует отметить, что прямая реализация реакций ядерного синтеза, когда пучки протонов или дейтонов ударяют в мишень с легкими ядрами, не проходит, поскольку частицы пучка теряют свою энергию на ионизацию

или упругие соударения с ядрами мишени, так что вероятность реакции синтеза пренебрежимо мала. Наиболее активно исследования по ядерному синтезу ведутся с горячей плазмой. В полностью ионизированной водородной, дейтериевой или тритиевой плазме процесс ионизации отсутствует. Если плазма адиабатически удерживается в некотором заданном объеме, то ее средняя энергия в результате упругих соударений не изменяется. Таким образом, если бы удалось удержать очень горячую дейтериевую или дейтерий-тритиевую плазму, ионы плазмы обладали бы достаточно большими скоростями, чтобы преодолеть взаимное кулоновское отталкивание и, столкнувшись, осуществить реакцию синтеза.

Рассмотрим ядерную реакцию при столкновении дейтона с тритием. Эффективное сечение ядра трития T обозначим через σ . Это сечение является функцией кинетической энергии дейтона E . Сечение D-T реакции при $E = 100$ кэВ составляет $5 \cdot 10^{-24}$ см². Сечения σ реакций D-T, D-D, D-He³ в зависимости от кинетической энергии сталкивающихся ядер приведены на рис. 1.2, а [1, 2]. Вероятность реакции синтеза в единицу времени в случае, когда ион дейтерия, движущийся со скоростью v , сталкивается с ионами трития, плотность которых n_T , равна $n_T \sigma v$ (более детально мы обсудим вероятность соударения

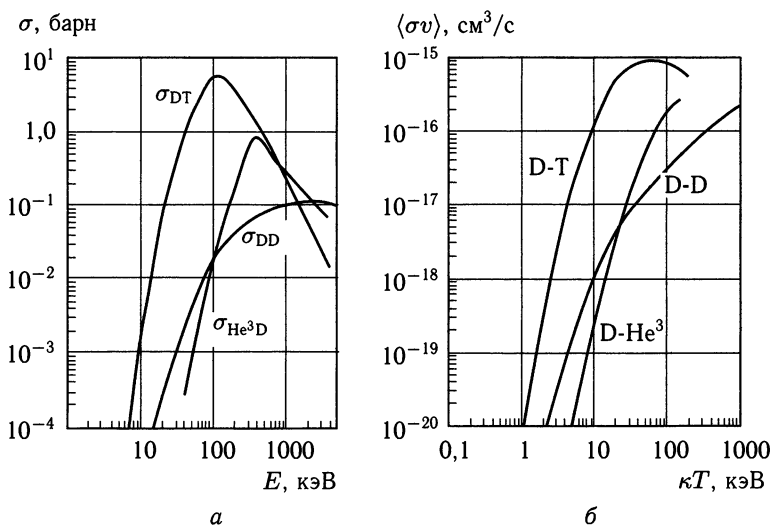


Рис. 1.2. а — зависимость сечения реакции синтеза σ от кинетической энергии E сталкивающихся ядер. σ_{DD} равна сумме сечений возможных каналов D-D реакции (1), (2); 1 барн = 10^{-24} см²; б — зависимость скорости реакции синтеза $\langle \sigma v \rangle$ от ионной температуры T_i

в разд. 2.7). Если плазма максвелловская с температурой ионов T_i , то необходимо рассчитать $\langle \sigma v \rangle$ — среднее по пространству скоростей значение величины σv . Зависимость $\langle \sigma v \rangle$ от ионной температуры T_i показана на рис. 1.2, б [3]. Для D-T реакции величина $\langle \sigma v \rangle$ в зависимости от κT , измеряемой в кэВ, может быть оценена по формуле [4]

$$\langle \sigma v \rangle (\text{м}^{-3}) = \frac{3,7 \cdot 10^{-18}}{H(\kappa T) \cdot (\kappa T)^{2/3}} \exp\left(-\frac{20}{(\kappa T)^{1/3}}\right), \quad (1.5)$$

где $H(\kappa T) \equiv \frac{\kappa T}{37} + \frac{5,45}{3 + \kappa T(1 + \kappa T/37,5)^{2,8}}$.

На рис. 1.3 изображена грубая схема электростанции с D-T

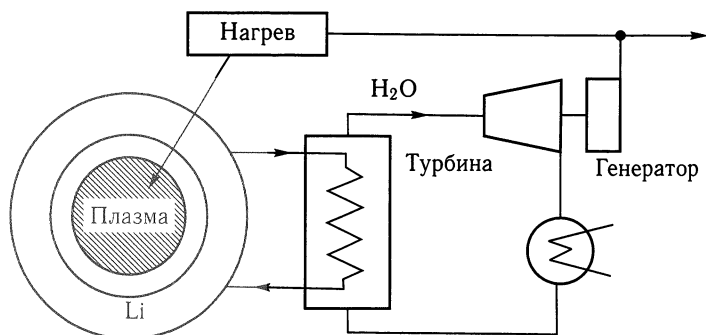


Рис. 1.3. Электростанция с D-T реактором синтеза

реактором синтеза. Быстрые нейтроны, рождающиеся в термоядерной плазме, проникают через первую стенку в литиевый бланкет, где их кинетическая энергия преобразуется в тепло. Помимо этого в бланкете происходит наработка трития посредством реакций (5), (6). Тепло из бланкета отводится с помощью теплообменника и используется для производства пара, электроэнергия же вырабатывается паровой турбиной. Часть произведенной электрической мощности тратится на работу системы нагрева плазмы, необходимой для компенсации потерь энергии из плазмы, которая поддерживается в горячем состоянии. Выход термоядерной энергии должен превышать необходимые энергетические затраты на нагрев плазмы с учетом эффективности преобразования. Поскольку требуемая для нагрева мощность равна в стационарном режиме скорости потерь энергии из термоядерной плазмы, ключевое значение приобретает хорошее удержание энергии горячей плазмы.

Тепловая энергия единицы объема плазмы равна $(3/2)n\kappa(T_i + T_e)$. Потери энергии связаны с теплопроводностью и конвективным переносом; обозначим скорость этих потерь (мощность) из единицы объема плазмы через P_L . Кроме того, существуют еще потери на излучение R , связанные с тормозным излучением электронов плазмы и излучением ионов примесей. Полное энергетическое время жизни (характерное время удержания энергии) τ_E определяется как

$$\tau_E \equiv \frac{(3/2)n\kappa(T_e + T_i)}{P_L + R} \approx \frac{3n\kappa T}{P_L + R}. \quad (1.6)$$

Необходимая мощность нагрева P_{heat} равна $P_L + R$. Сумма кинетических энергий α -частицы (иона He^4) с энергией $Q_\alpha = 3,52$ МэВ и нейтрона с энергией $Q_n = 14,06$ МэВ, образующихся в одном элементарном акте D-T реакции, равна $Q_{\text{NF}} = 17,58$ МэВ. Поскольку концентрации ионов дейтерия и трития в равнокомпонентной плазме равны $n/2$ каждая, число актов реакции в единице объема за единицу времени равно $(n/2)(n/2)\langle\sigma v\rangle$, так что термоядерная мощность P_{NF} , выделяющаяся в единице объема плазмы, равна

$$P_{\text{NF}} = (n/2)(n/2)\langle\sigma v\rangle Q_{\text{NF}}. \quad (1.7)$$

Введем КПД η_{el} преобразования тепловой энергии в электрическую и КПД нагрева η_{heat} — отношение вводимой в плазму мощности к мощности, потребляемой системой нагрева. Тогда условие положительного выхода энергии записывается в виде

$$P_{\text{heat}} = P_L + R = \frac{3n\kappa T}{\tau_E} < (\eta_{\text{el}})(\eta_{\text{heat}})P_{\text{NF}}, \quad (1.8)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{3n\kappa T}{\tau_E} &< (\eta_{\text{heat}})(\eta_{\text{el}}) \frac{Q_{\text{NF}}}{4} n^2 \langle\sigma v\rangle, \\ n\tau_E &> \frac{12\kappa T}{\eta Q_{\text{NF}} \langle\sigma v\rangle}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где η — произведение двух КПД. Правая часть последнего выражения зависит только от температуры T . Если $\kappa T = 10^4$ эВ и $\eta \approx 0,3$ ($\eta_{\text{el}} \approx 0,4$, $\eta_{\text{heat}} \approx 0,75$), то необходимо, чтобы $n\tau_E > 1,7 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}$. Условие «термоядерности» D-T плазмы при $\eta \approx 0,3$ показано на рис. 1.4. В действительности, плазма горячая в центре и холодная на краю, поэтому для более аккуратных выводов необходимо учитывать конкретные профили температуры и плотности, что будет сделано в разд. 6.11.

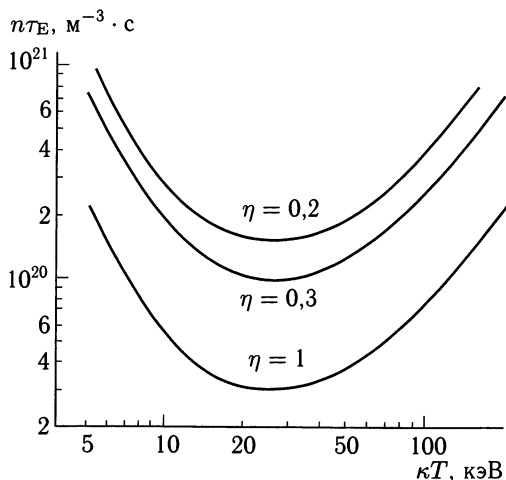


Рис. 1.4. Условия «термоядерности» D-T плазмы при $\eta = 0,3$, положительности выхода энергии ($\eta = 1$) и зажигания ($\eta = 0,2$) на диаграмме $nT_E - T$

Критерий $P_{\text{heat}} = P_{\text{NF}}$ называется *порогом положительного энергосвыхода*, что соответствует условию «термоядерности» при $\eta \leq 1$. Отношение доли термоядерной энергии, связанной с α -частицами, к полной термоядерной энергии равно $Q_\alpha/Q_{\text{NF}} = 0,2$. Поскольку α -частицы заряжены, то они могут нагревать плазму посредством кулоновских столкновений (см. разд. 2.8). Если вся кинетическая энергия α -частиц остается в плазме, то при выполнении условия $P_{\text{heat}} = 0,2P_{\text{NF}}$ высокая температура плазмы может поддерживаться без внешнего нагрева. Это условие называется *условием зажигания* и отвечает случаю $\eta = 0,2$.

Список литературы

1. Arnold W.R., Phillips J.A., Sawyer G.A. et al. Phys. Rev. 1954. V. 93. P. 483.
2. Wandel C.F., Hesselberg Jensen T., Kofoed-Hansen O. Nucl. Instrum. a. Methods. 1959. V. 4. P. 249.
3. Tuck J.L. Nucl. Fusion. 1961. V. 1. P. 201.
4. Takizuka T., Yamagiwa M. JAERI-M 87-066 / Japan Atomic Energy Research Institute. 1987.

ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАЗМЫ

§ 2.1. Функция распределения в пространстве скоростей, электронная и ионная температуры

Электроны, так же как и ионы, движутся в плазме с разными скоростями. Число электронов n_e в единице объема называется электронной плотностью. Число электронов $dn_e(v_x)$ с x -компонентой скорости, заключенной в интервале от v_x до $v_x + dv_x$, записывается в виде

$$dn_e(v_x) = f_e(v_x)dv_x,$$

где $f_e(v_x)$ называется электронной *функцией распределения в пространстве скоростей* (или функцией распределения по скоростям). Когда электроны находятся в состоянии теплового равновесия с температурой T_e , их функция распределения в пространстве скоростей — максвелловская:

$$f_e(v_x) = n_e \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\beta v_x^2}{2}\right), \quad \beta = \frac{m_e}{\kappa T_e}.$$

По определению, функция распределения в пространстве скоростей удовлетворяет следующему соотношению:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e(v_x)dv_x = n_e.$$

Максвелловская функция распределения в трехмерном пространстве скоростей есть

$$f_e(v_x, v_y, v_z) = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_e(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\kappa T_e}\right). \quad (2.1)$$

Ионная функция распределения вводится аналогично. Средний квадрат скорости v_x^2 определяет температуру:

$$v_T^2 = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{\kappa T}{m}. \quad (2.2)$$

Давление p определяется как

$$p = n\kappa T.$$

Поток частиц $\Gamma_{+,x}$ в направлении x через единичную площадку равен

$$\Gamma_{+,x} = \int_0^{\infty} v_x f(v_x) dv_x = n \left(\frac{\kappa T}{2\pi m} \right)^{1/2}.$$

Если пучок электронов со средней скоростью v_b инжектируется в максвелловскую плазму, то, как показано на рис. 2.1, б,

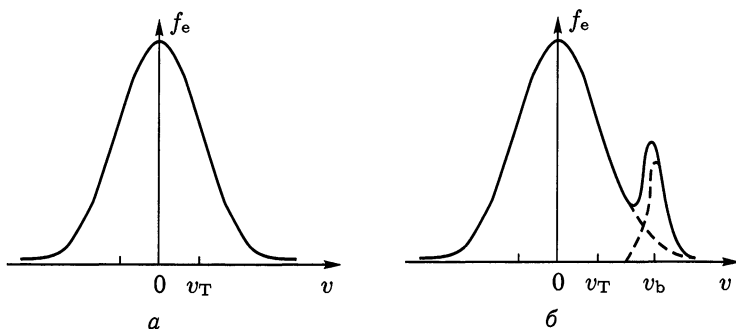


Рис. 2.1. *a* — максвелловская функция распределения по скоростям с температурой T_e ; *б* — функция распределения по скоростям максвелловской плазмы с электронной температурой T_e и инжектированного пучка электронов со средней скоростью v_b

функция распределения становится «горбатой» и может быть аппроксимирована следующим выражением:

$$f_e(v_z) = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_e} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_e v_z^2}{2\kappa T_e} \right) + n_b \left(\frac{m_e}{2\pi\kappa T_b} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{m_e (v_z - v_b)^2}{2\kappa T_b} \right).$$

§ 2.2. Плазменная частота, дебаевская длина

Рассмотрим ситуацию, когда электроны в изначально однородной плазме движутся под действием малого возмущения плотности. Предполагается, что ионы остаются неподвижными, т. к. масса иона много больше массы электрона. Смещение электронов приводит к возникновению электрического заряда и соответствующего электрического поля, которое определяется уравнением Пуассона

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -e(n_e - n_0).$$

Электроны ускоряются электрическим полем:

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}.$$

Из-за движения плотность электронов меняется:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}) = 0.$$

Обозначим $n_e - n_0 = n_1$ и предположим, что $|n_1| \ll n_0$. Тогда получим

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = -en_1, \quad m_e \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -e\mathbf{E}, \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Предположим для простоты, что смещение происходит только в направлении оси x и что оно синусоидально,

$$n_1(x, t) = n_1 \exp(ikx - i\omega t).$$

Производную по времени $\partial/\partial t$ заменим на $-i\omega$, а производную $\partial/\partial x$ по координате — на ik , так что

$$ik\epsilon_0 E = -en_1, \quad -i\omega m_e v = -eE, \quad -i\omega n_1 = -ikn_0 v,$$

и мы находим

$$\omega^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (2.3)$$

Такая волна называется *электронной плазменной*, или *ленгмюровской*, а ее частота — *электронной плазменной частотой* Π_e :

$$\Pi_e = \left(\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \right)^{1/2} = 5,64 \cdot 10^{11} \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{1/2} \text{ рад/с.}$$

Между плазменной частотой и дебаевской длиной λ_D имеется следующая связь:

$$\lambda_D \Pi_e = \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2} = v_{Te}.$$

§ 2.3. Циклотронная частота, ларморовский радиус

Уравнение движения заряженной частицы массы m с зарядом q в присутствии электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{B} полей имеет вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.4)$$

Если магнитное поле однородно и направлено по оси z , а электрическое равно нулю, то уравнение движения приобретает вид $\dot{\mathbf{v}} = (qB/m)(\mathbf{v} \times \mathbf{b})$, где $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$, откуда

$$\begin{aligned} v_x &= -v_{\perp} \sin(\Omega t + \delta), \\ v_y &= v_{\perp} \cos(\Omega t + \delta), \\ v_z &= v_{z0}, \\ \Omega &= -\frac{qB}{m}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Это решение описывает спиральное движение частицы вокруг силовой линии магнитного поля с угловой скоростью Ω (см. рис. 2.2). Такое движение называется *ларморовским*. Величина

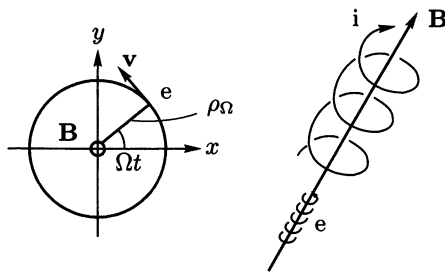


Рис. 2.2. Ларморовское движение заряженной частицы в магнитном поле

Ω называется *циклотронной (ларморовской) частотой*. Обозначим радиус орбиты через ρ_{Ω} , тогда центробежная сила равна $mv_{\perp}^2/\rho_{\Omega}$, а сила Лоренца есть $qv_{\perp}B$. Так как обе силы должны уравновешивать друг друга, находим

$$\rho_{\Omega} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}. \quad (2.6)$$

Эта величина называется *ларморовским радиусом*, а центр ларморовской орбиты называется *ведущим центром*. Ларморовское вращение электрона происходит по правому винту ($\Omega_e > 0$), а положительно заряженного иона — по левому ($\Omega_i < 0$) (см. рис. 2.2). В следующей таблице приведены значения ларморовского радиуса и циклотронной частоты для случая $B = 1$ Т, $\kappa T = 100$ эВ.

$B = 1$ Т, $\kappa T = 100$ эВ	Электрон	Протон
Тепловая скорость, $v_T = (\kappa T/m)^{1/2}$	$4,2 \cdot 10^6$ м/с	$9,8 \cdot 10^4$ м/с
Ларморовский радиус, ρ_Ω	23,8 мкм	1,02 мм
Угловая циклотронная частота, Ω	$1,76 \cdot 10^{11}$ с ⁻¹	$-9,58 \cdot 10^7$ с ⁻¹
Циклотронная частота, $\Omega/2\pi$	28 ГГц	-15,2 МГц

§ 2.4. Дрейфовая скорость ведущего центра

Если однородное электрическое поле \mathbf{E} перпендикулярно к однородному магнитному полю, то уравнение движения (2.4) подстановкой

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_E + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B} \quad (2.7)$$

сводится ¹⁾ к

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q(\mathbf{u} \times \mathbf{B}).$$

Таким образом, движение заряженной частицы является суперпозицией ларморовского движения и дрейфового движения его ведущего центра со скоростью \mathbf{u}_E . Направление дрейфа ведущего центра под действием электрического поля \mathbf{E} одинаково для положительно и отрицательно заряженных частиц (рис. 2.3).

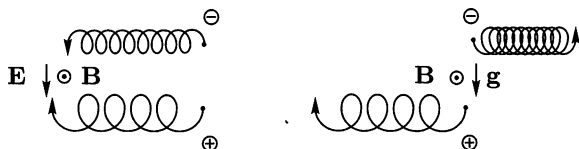


Рис. 2.3. Дрейфовое движение ведущего центра в электрическом и гравитационном поле (схематическое изображение)

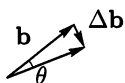
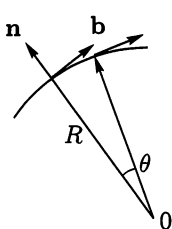
¹⁾ В случае стационарных полей. — Примеч. ред.

Если приложено гравитационное поле \mathbf{g} , то соответствующая (гравитационная) сила равна $m\mathbf{g}$ и именно ее необходимо рассматривать вместо $q\mathbf{E}$ для случая электрического поля. Поэтому скорость дрейфа ведущего центра под действием гравитации равна

$$\mathbf{u}_g = \frac{m}{qB}(\mathbf{g} \times \mathbf{b}) = -\frac{\mathbf{g} \times \mathbf{b}}{\Omega}. \quad (2.8)$$

Направления ионного и электронного дрейфов в гравитационном поле противоположны, причем скорость дрейфа ведущего центра иона значительно больше, чем электрона (см. рис. 2.3).

Если электрическое и магнитное поля слабо меняются в пространстве и времени ($|\omega/\Omega| \ll 1$, $\rho_\Omega/R \ll 1$), выражения для скорости дрейфа сохраняют свой прежний вид. Однако из-за кривизны магнитной силовой линии на частицу, движущуюся вдоль силовой линии со скоростью v_{\parallel} , действует центробежная сила, сообщая ускорение



$$\mathbf{g}_{\text{curv}} = \frac{v_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n},$$

где R — радиус кривизны силовой линии, а \mathbf{n} — единичный вектор в направлении от центра ее кривизны (рис. 2.4). Как будет показано ниже, результирующий эффект лармовского движения в неоднородном магнитном поле также сводится к действию эффективной силы с ускорением

Рис. 2.4. Радиус кривизны магнитной силовой линии

Тем самым, скорость дрейфа ведущего центра в кривом неоднородном магнитном поле, рассчитанная в дрейфовом приближении, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{g}_{\nabla B} = -\frac{v_{\perp}^2/2}{B} \nabla B.$$

Тем самым, скорость дрейфа ведущего центра в кривом неоднородном магнитном поле, рассчитанная в дрейфовом приближении, выглядит следующим образом:

$$\mathbf{u}_g = -\frac{1}{\Omega} \left(\frac{v_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n} - \frac{v_{\perp}^2}{2} \frac{\nabla B}{B} \right) \times \mathbf{b}. \quad (2.9)$$

Первый член называют *центробежным дрейфом*, а второй — *градиентным*. Так как $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, то можно записать

$$\begin{aligned} \frac{1}{2B} \nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial l} (B\mathbf{b}) + \mathbf{b} \times \mu_0 \mathbf{j} = \\ &= \frac{\partial B}{\partial l} \mathbf{b} + B \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l} - \mu_0 \frac{\nabla p}{B} = \frac{\partial B}{\partial l} \mathbf{b} - B \frac{\mathbf{n}}{R} - \mu_0 \frac{\nabla p}{B}, \end{aligned}$$

где длина l измеряется вдоль силовой линии, и мы использовали соотношение (см. рис. 2.4)

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial l} = -\frac{\mathbf{n}}{R}.$$

Имеем

$$\frac{\mathbf{n} \times \mathbf{b}}{R} = -\left(\frac{\nabla B}{B} + \mu_0 \frac{\nabla p}{B^2}\right) \times \mathbf{b}.$$

Если ∇p много меньше, чем $\nabla B^2/(2\mu_0)$, находим, что ¹⁾

$$\mathbf{u}_g = -\frac{1}{\Omega} \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{R} (\mathbf{n} \times \mathbf{b}).$$

Продольное движение (вдоль магнитного поля) описывается уравнением

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = qE_{\parallel} + mg_{\parallel} - \frac{mv_{\perp}^2/2}{B} \nabla_{\parallel} B.$$

Рассмотрим влияние неоднородности магнитного поля на вращающуюся заряженную частицу. X -компонента силы Лоренца, $\mathbf{F}_L = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, перпендикулярна магнитному полю, направленно по оси z , и абсолютная величина B магнитного поля вблизи ведущего центра равны соответственно:

$$\begin{aligned} F_{Lx} &= qv_y B = -|q|v_{\perp} B \cos \theta, \\ B &= B_0 + \frac{\partial B}{\partial x} \rho_{\Omega} \cos \theta + \frac{\partial B}{\partial y} \rho_{\Omega} \sin \theta. \end{aligned}$$

Средняя по времени x -компонента силы Лоренца равна $\langle F_{Lx} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x} (-|q|)v_{\perp} \rho_{\Omega}$, средняя y -компонента рассчитывается аналогично, и мы получаем (см. рис. 2.5)

$$\langle \mathbf{F}_L \rangle_{\perp} = -\frac{mv_{\perp}^2/2}{B} \nabla_{\perp} B.$$

Далее необходимо оценить среднюю по времени z -компоненту силы Лоренца. Уравнение $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ вблизи положения веду-

¹⁾ Градиент давления появился в этих формулах из-за использования уравнения равновесия (см. гл. 6), что представляется не вполне оправданным при анализе движения отдельных частиц во *внешнем* поле. Более естественным здесь было бы сразу положить $\mathbf{j} = 0$, считая, что магнитное поле создается некими сторонними токами. — *Примеч. ред.*

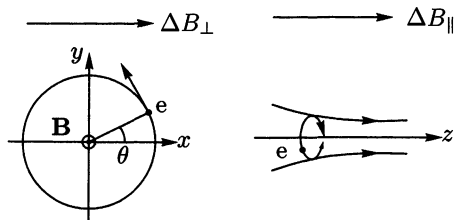


Рис. 2.5. Ларморовское движение в неоднородном магнитном поле

щего центра на рис. 2.5 записывается в виде $B_r/r + \partial B_r/\partial r + \partial B_z/\partial z = 0$, и мы находим

$$\langle F_{Lz} \rangle = -\langle qv_\theta B_r \rangle = |q|v_\perp \rho \Omega \frac{\partial B_r}{\partial r} = -\frac{mv_\perp^2/2}{B} \frac{\partial B}{\partial z},$$

т. к. r очень мало. Таким образом, искомое выражение для $\mathbf{g}_{\nabla B}$ выведено.

§ 2.5. Магнитный момент, пробочное удержание, продольный адиабатический инвариант

Петля площадью S с током I обладает магнитным моментом $\mu_m = IS$. Так как ларморовское вращение заряженной частицы также отвечает току, обтекающему некоторую площадку (величина тока и площадь площадки равны соответственно $I = q\Omega/2\pi$, $S = \pi\rho_\Omega^2$), то такой ларморовский кружок обладает магнитным моментом

$$\mu = \frac{q\Omega}{2\pi} \pi\rho_\Omega^2 = \frac{mv_\perp^2}{2B}. \quad (2.10)$$

Как будет показано в этом разделе ниже, эта физическая величина — адиабатический инвариант. Если магнитное поле меняется медленно, то магнитный момент сохраняется. Поэтому если магнитное поле B возрастает, то $mv_\perp^2 = \mu B$ тоже возрастает, и частицы нагреваются. Такой способ нагрева называется *адиабатическим*.

Рассмотрим пробочную магнитную ловушку, в которой, как показано на рис. 2.6, магнитное поле мало в центре и велико на концах (в пробках). Для простоты предположим, что электрическое поле равно нулю. Так как сила Лоренца перпендикулярна скорости, то кинетическая энергия при движении в магнитном

поле не изменяется,

$$\frac{mv_{\parallel}^2}{2} + \frac{mv_{\perp}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} = E = \text{const.} \quad (2.11)$$

Поскольку магнитный момент сохраняется, находим

$$v_{\parallel} = \pm \left(\frac{2}{m} E - v_{\perp}^2 \right)^{1/2} = \pm \left(v^2 - \frac{2}{m} \mu B \right)^{1/2}.$$

Когда частица движется по направлению к открытому концу (к пробке), магнитное поле становится большим, а v_{\parallel} — малой или даже нулевой. Поскольку сила, действующая параллельно магнитному полю, равна $-\mu \nabla_{\parallel} B$, заряженные частицы отражаются от обоих концов пробочного поля, как свет отражается от зеркала¹⁾. Отношение величины магнитного поля на открытом конце и в центре называется *пробочным отношением*:

$$R_M = \frac{B_M}{B_0}.$$

Обозначим компоненты скорости вдоль и поперек магнитного поля частицы, находящейся в центре пробочного поля, через $v_{\parallel 0}$ и $v_{\perp 0}$ соответственно. Значение v_{\perp}^2 в точке, где магнитное поле максимально, B_M , равно

$$v_{\perp M}^2 = \frac{B_M}{B_0} v_{\perp 0}^2.$$

Если это значение больше, чем $v^2 = v_0^2$, частица не может вылететь через открытый конец. Таким образом, она отражается и оказывается запертой в пробочном поле, если

$$\left(\frac{v_{\perp 0}}{v_0} \right)^2 > \frac{B_0}{B_M} = \frac{1}{R_M}. \quad (2.12)$$

Частицы в области, где значения $\sin \theta \equiv v_{\perp 0}/v_0$ таковы, что

$$\sin^2 \theta \leq \frac{1}{R_M},$$

¹⁾ Это сравнение разъясняет термин «зеркальная ловушка», принятый в англоязычной литературе. Принцип удержания заряженных частиц продольно неоднородным магнитным полем был выдвинут в начале 1950-х гг. независимо в СССР (Г. И. Будкером) и в США (Р. Ф. Постом и Х. Ф. Йорком). С тех пор основанные на этом принципе магнитные ловушки на русском языке именуются «пробкотронами», а на английском — «магнитными зеркалами». — *Примеч. ред.*

не заперты, поэтому эта заштрихованная на рис. 2.6 область называется *конусом потерь* в пространстве скоростей.

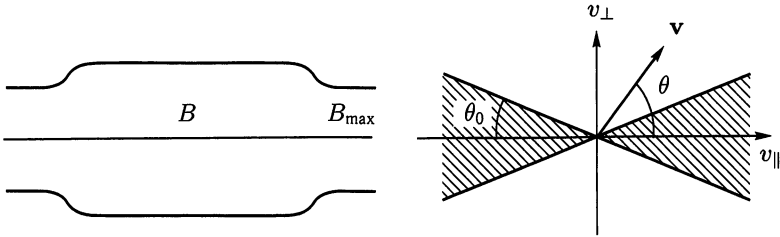


Рис. 2.6. Магнитное поле и конус потерь в пространстве v_{\parallel} – v_{\perp}

Проверим инвариантность μ в присутствии медленно меняющегося магнитного поля, ($|\partial B/\partial t| \ll |\Omega B|$). Умножим скалярно \mathbf{v}_{\perp} на уравнение движения

$$m\mathbf{v}_{\perp} \cdot \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\perp}^2}{2} \right) = q(\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}).$$

За один период $2\pi/|\Omega|$ ларморовского движения изменение ΔW_{\perp} кинетической энергии $W_{\perp} = mv_{\perp}^2/2$ равно

$$\Delta W_{\perp} = q \oint (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}) dt = q \oint \mathbf{E}_{\perp} \cdot d\mathbf{s} = q \int (\nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

где $\oint d\mathbf{s}$ — интеграл по контуру ларморовской орбиты, а $\int dS$ — интеграл по ее площади. Так как $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$, то

$$\Delta W_{\perp} = -q \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = |q| \pi \rho_{\Omega}^2 \frac{\partial B}{\partial t}.$$

Изменение магнитного поля ΔB за один период ларморовского движения составляет $\Delta B = (\partial B/\partial t)(2\pi/|\Omega|)$, и мы находим

$$\Delta W_{\perp} = \frac{mv_{\perp}^2}{2} \frac{\Delta B}{B} = W_{\perp} \frac{\Delta B}{B}$$

и

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B} = \text{const.}$$

Если движение периодически во времени, то интеграл действия $\oint p dq$, записанный в канонических переменных p, q , является, как известно, адиабатическим инвариантом. Интеграл действия ларморовского движения $J_{\perp} = (-m\rho_{\Omega}\Omega)2\pi\rho_{\Omega} = -(4\pi m/q)\mu$ называется *поперечным адиабатическим инвариантом*.

Запертая в пробочном поле частица совершает возвратно-поступательное движение вдоль силовой линии между магнит-

ными пробками. Интеграл действия такого периодического движения

$$J_{\parallel} = m \oint v_{\parallel} dl \quad (2.13)$$

также является адиабатическим инвариантом. J_{\parallel} называется *продольным адиабатическим инвариантом*. Если уменьшать длину пробочной системы l , то $\langle v_{\parallel} \rangle$ будет возрастать (при сохранении $J_{\parallel} = 2m\langle v_{\parallel} \rangle l$), и частицы будут ускоряться. Это явление называется *ускорением Ферми*.

Силовые линии магнитного поля сходятся по направлению к пробке. Запертые частицы подвержены центробежному и градиентному дрейфу, так что во время возвратно-поступательного движения вдоль силовых линий они дрейфуют по азимуту (в направлении угла θ). Орбита (r, θ) , образованная точками пересечения траектории возвратно-поступательного движения частицы с плоскостью $z = 0$, описывается уравнением $J_{\parallel}(r, \theta, \mu, E) = \text{const}$.

§ 2.6. Время кулоновских столкновений, инжекция быстрых нейтральных атомов

Движение заряженных частиц рассматривалось в предыдущем разделе без учета столкновений между частицами. В настоящем разделе обсуждаются явления, связанные с *кулоновскими столкновениями*. Начнем с простой модели. Предположим, что сфера радиуса a движется со скоростью v в пространстве, заполненном сферами радиуса b с плотностью n (см. рис. 2.7). Когда расстояние между двумя частицами становится меньше $a + b$, происходит столкновение. Сечение σ такого столкновения равно $\sigma = \pi(a + b)^2$. Так как сфера радиуса a проходит за время δt расстояние $l = v\delta t$, то вероятность столкновения со сферой радиуса b

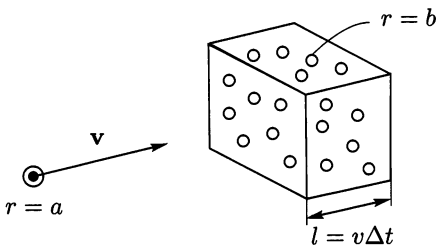


Рис. 2.7. Вероятность столкновения сферы радиуса a со сферами радиуса b

$$nl\sigma = n\sigma v\delta t.$$

В данном случае nl — возможное число сфер b , с которыми налетающая сфера a может столкнуться за время δt внутри области с единичным сечением, а $nl\sigma$ — их полное число внутри

области с сечением, равным σ . Поэтому величина, обратная времени столкновений t_{coll} , равна

$$(t_{\text{coll}})^{-1} = n\sigma v.$$

В этом простом случае сечение столкновения σ не зависит от скорости налетающей сферы a , хотя в общем случае такая зависимость может иметь место.

Рассмотрим кулоновское столкновение электрона с ионом, в результате которого налетающий электрон сильно отклоняется от первоначального направления (см. рис. 2.8). Столкновения

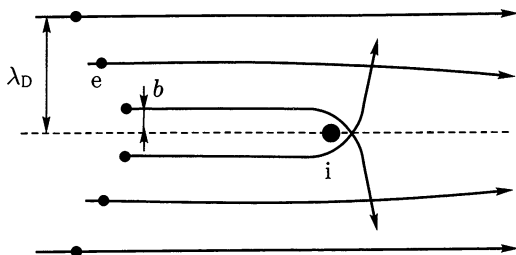


Рис. 2.8. Кулоновское соударение электрона с ионом

такого рода возможны, когда величина электростатического потенциала электрона на ближайшем к иону расстоянии b порядка кинетической энергии налетающего электрона, т. е.

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 b} \approx \frac{m_e v_e^2}{2}.$$

Сечение такого близкого кулоновского столкновения равно $\sigma = \pi b^2$. Обратное время столкновения при близких кулоновских столкновениях равно

$$\frac{1}{t_{\text{coll}}} = n_i \sigma v_e = n_i v_e \pi b^2 = \frac{n_i \pi (Ze^2)^2 v_e}{(4\pi\epsilon_0 m_e v_e^2 / 2)^2} = \frac{Z^2 e^4 n_i}{4\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}.$$

Поскольку кулоновская сила является дальнедействующей, пробная частица отклоняется на небольшой угол даже удаленной полевой частицей, к которой пробная частица близко не подходит. Как было указано в разд. 1.2, кулоновское поле полевой частицы не экранируется в пределах дебаевской сферы (т. е. сферы с радиусом, равным дебаевскому, λ_D), а внутри дебаевской сферы в условиях обычной лабораторной плазмы находится большое количество полевых частиц (слабовзаимодействующая плазма). Большое число столкновений с малым углом рассеяния

в результате приводит к большому эффекту. Учет таких дальних столкновений с малым углом рассеяния приводит к увеличению суммарного сечения кулоновского столкновения в *кулоновский логарифм раз*:

$$\ln \Lambda \approx \ln \left(\frac{2\lambda_D}{b} \right) \approx \int_{b/2}^{\lambda_D} \frac{1}{r} dr \approx 15-20.$$

Производная по времени компоненты импульса p_{\parallel} вдоль направления движения налетающего электрона выражается [1, 2] через *время столкновений* $\tau_{ei\parallel}$:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{\parallel}}{dt} &= -\frac{p_{\parallel}}{\tau_{ei\parallel}}, \\ \frac{1}{\tau_{ei\parallel}} &= \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\tau_{ei\parallel}$ — характерное время торможения электрона ионами.

В общем случае, при столкновении пробной частицы с зарядом q , массой m и скоростью v с полевой частицей с зарядом q^* , массой m^* и тепловой скоростью $v_T^* = (\kappa T^*/m^*)^{1/2}$ время столкновения дается выражением [1, 2]

$$\frac{1}{\tau_{\parallel}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m m_{\Gamma} v^3} = \left(\frac{q q^* n^*}{\epsilon_0 m} \right)^2 \frac{\ln \Lambda}{4\pi (m_{\Gamma}/m) v^3 n^*} \quad (2.15)$$

в предположении $v > v_T^*$. Здесь m_{Γ} обозначает эффективную массу, $m_{\Gamma} = m m^*/(m + m^*)$. Подставляя среднее значение $(m/2)v^2 = (3/2)\kappa T$, получаем для $1/\tau_{\parallel}$:

$$\frac{1}{\tau_{\parallel}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{3^{1/2} 12\pi \epsilon_0^2 (m_{\Gamma}/m^{1/2}) (\kappa T)^{3/2}}. \quad (2.16)$$

При столкновениях электрона с ионами эта формула для времени столкновений дает

$$\frac{1}{\tau_{ei\parallel}} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{3^{1/2} 12\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T)^{3/2}}, \quad (2.17)$$

что с погрешностью $\sim 20\%$ совпадает с формулой Спитцера [4]

$$\frac{1}{\tau_{ei\parallel\text{Spitzer}}} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{51,6\pi^{1/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T_e)^{3/2}}. \quad (2.18)$$

Если ион с зарядом Z и массой m_i сталкивается с такими же ионами, время ион-ионных столкновений дается формулой

$$\frac{1}{\tau_{ii\parallel}} = \frac{Z^4 e^4 n_i \ln \Lambda}{3^{1/2} 6\pi \epsilon_0^2 m_i^{1/2} (\kappa T_i)^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Время электрон-электронных кулоновских столкновений можно получить заменой $m_i \rightarrow m_e$ и $Z \rightarrow 1$ в формуле для $\tau_{ii\parallel}$,

$$\frac{1}{\tau_{ee\parallel}} = \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{3^{1/2} 6\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T_e)^{3/2}}. \quad (2.20)$$

Случай кулоновского рассеяния иона на электронах более труден для рассмотрения, поскольку предположение $v_i > v_T^*$ более несправедливо. Рассмотрим случай, когда пробная частица с массой M и скоростью v_s сталкивается с полевой частицей массы m . В системе центра масс, в которой сам центр масс неподвижен, полевая частица m движется со скоростью $v_c = -Mv_s/(M+m)$, а пробная частица M — со скоростью $v_s - v_c = mv_s/(M+m)$ (см. рис. 2.9). Так как полные импульс

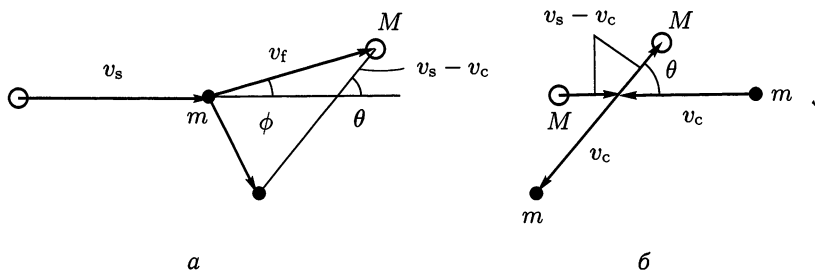


Рис. 2.9. Упругое столкновение пробной частицы M и полевой частицы m : а — в лабораторной системе; б — системе центра масс

и кинетическая энергия двух частиц в процессе упругого соударения сохраняются, то их скорости не меняются по величине, так что в системе центра масс частицы просто отклоняются в своем движении на угол θ . Скорость v_f и угол рассеяния ϕ пробной частицы в результате соударения в лабораторной системе координат (см. рис. 2.9) таковы, что

$$v_f^2 = (v_s - v_c)^2 + v_c^2 + 2(v_s - v_c)v_c \cos \theta = v_s^2 \frac{(M^2 + 2Mm \cos \theta + m^2)}{(M+m)^2},$$

$$\sin \phi = \frac{m \sin \theta}{(M^2 + 2Mm \cos \theta + m^2)^{1/2}}.$$

Обозначив импульс и кинетическую энергию пробной частицы до и после столкновения через p_s , E_s и p_f , E_f соответственно, находим

$$\frac{\Delta E}{E_s} \equiv \frac{E_f - E_s}{E_s} = -\frac{2Mm}{(M+m)^2}(1 - \cos \theta).$$

Усреднив по θ , получим в случае $m/M \ll 1$ следующие соотношения:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E_s} \right\rangle \approx -\frac{2m}{M}, \quad \left\langle \frac{\Delta p_{\parallel}}{p_s} \right\rangle \approx -\frac{m}{M}.$$

Из вышесказанного следует, что обратное время столкновения $1/\tau_{ie\parallel}$ тяжелого иона с легкими электронами примерно в m_i/m_e раз меньше, чем $1/\tau_{ei\parallel}$ и равно [1, 2]

$$\frac{1}{\tau_{ie\parallel}} = \frac{m_e}{m_i} \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{(2\pi)^{1/2} 3\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T_e)^{3/2}}. \quad (2.21)$$

Обозначив продольную и поперечную компоненты импульса пробной частицы через p_{\parallel} и p_{\perp} соответственно, а энергию — через E , имеем:

$$E = \frac{p_{\parallel}^2 + p_{\perp}^2}{2m},$$

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} = 2m \frac{dE}{dt} - 2p_{\parallel} \frac{dp_{\parallel}}{dt}.$$

Определим характерное время изменения скорости τ_{\perp} в направлении, перпендикулярном направлению начального импульса, и характерное время релаксации энергии τ^e соотношениями

$$\frac{dp_{\perp}^2}{dt} \equiv \frac{p_{\perp}^2}{\tau_{\perp}},$$

$$\frac{dE}{dt} \equiv -\frac{E}{\tau^e}.$$

В предположении $v > v_T^*$, величины $1/\tau_{\perp}$ и $1/\tau^e$ равны соответственно [1]

$$\frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 v (mv)^2} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m^2 v^3}, \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{\tau^e} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^* v (mv^2/2)} = \frac{q^2 q^{*2} n^* \ln \Lambda}{2\pi \epsilon_0^2 m m^* v^3}. \quad (2.23)$$

При электрон-ионном столкновении

$$\frac{1}{\tau_{ei\perp}} \approx \frac{2}{\tau_{ei\parallel}}, \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{\tau_{ei}} \approx \frac{m_e}{m_i} \frac{2}{\tau_{ei||}}. \quad (2.25)$$

В случае электрон-электронного и ион-ионного столкновений находим, что

$$\frac{1}{\tau_{ee\perp}} \approx \frac{1}{\tau_{ee||}}, \quad \left(\frac{1}{\tau_{ee||}} \approx \frac{2}{Z} \frac{1}{\tau_{ei||}} \right), \quad (2.26)$$

$$\frac{1}{\tau_{ee}^\epsilon} \approx \frac{1}{\tau_{ee||}} \quad (2.27)$$

и

$$\frac{1}{\tau_{ii\perp}} \approx \frac{1}{\tau_{ii||}}, \quad (2.28)$$

$$\frac{1}{\tau_{ii}^\epsilon} \approx \frac{1}{\tau_{ii||}}. \quad (2.29)$$

В случае столкновений иона с электронами верны следующие соотношения [1]:

$$\frac{1}{\tau_{ie\perp}} \approx \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{(2\pi)^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} E_i (\kappa T_e)^{1/2}} \frac{m_e}{m_i}, \quad (2.30)$$

$$\frac{1}{\tau_{ie}^\epsilon} \approx \frac{Z^2 e^4 n_e \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T_e)^{3/2}} \frac{4}{3(2\pi)^{1/2}} \frac{m_e}{m_i} \approx \frac{1}{\tau_{ie||}} \approx \frac{m_e}{m_i} \frac{2,77}{\tau_{ei||}}, \quad (2.31)$$

где $E_i = (3/2)\kappa T_i$ — кинетическая энергия иона. Обратное время столкновения называется *частотой столкновений* и обозначается через ν . *Длина свободного пробега* вводится как $\lambda = 3^{1/2} \nu_T \tau$.

В плазму поперек магнитного поля могут быть инжектированы пучки высокоэнергичных нейтральных частиц (атомов, реже — молекул). В результате процесса ионизации или перезарядки на ионах плазмы нейтральные частицы превращаются в высокоэнергичные ионы. Высокоэнергичные ионы (масса которых m_b , электрический заряд Z_{be} , энергия E_b), проходя через плазму, тормозятся в результате кулоновских соударений с ионами (m_i, Z_i) и электронами ($m_e, -e$) плазмы; тем самым, энергия пучка передается плазме. Этот метод называют *нагревом при помощи инъекции быстрых нейтралов*. Скорость изменения энергии быстрого иона, т. е. скорость нагрева плазмы, равна

$$\frac{dE_b}{dt} = -\frac{E_b}{\tau_{bi}^\epsilon} - \frac{E_b}{\tau_{be}^\epsilon},$$

$$\frac{1}{\tau_{bi}^\epsilon} = \frac{(Z_b e)^2 (Z_i e)^2 \ln \Lambda n_i}{2\pi\epsilon_0^2 m_i m_b v_{bi}^3},$$

так что [3]

$$\frac{dE_b}{dt} = -\frac{Z_b^2 e^4 \ln \Lambda n_e}{4\pi\epsilon_0^2 m_e v_{bi}} \left(\sum \frac{m_e n_i Z_i^2}{m_i n_e} + \frac{4}{3\pi^{1/2}} \left(\frac{m_e E_b}{m_b \kappa T_e} \right)^{3/2} \right). \quad (2.32)$$

Эта формула справедлива, когда скорость иона пучка v_b много меньше (например, в 3 раза), чем тепловая скорость электронов, и много больше (например, в 2 раза), чем тепловая скорость ионов плазмы. Первый член в правой части отвечает столкновениям частиц пучка с ионами, а второй — с электронами. Критическая энергия E_{cr} иона пучка, при которой ионы и электроны плазмы нагреваются с одной скоростью, равна

$$\frac{m v_{cr}^2}{2} = E_{cr} = 14,8 \kappa T_e A_b \left(\frac{1}{n_e} \sum \frac{n_i Z_i^2}{A_i} \right)^{2/3}, \quad (2.33)$$

где A_b, A_i — атомные веса инжектируемого иона и ионов плазмы соответственно. Если энергия инжектируемого иона превышает E_{cr} , то доминирует нагрев электронов. Время торможения ионного пучка рассчитывается как

$$\tau_{slowdown} = \int_{E_{cr}}^{E_b} \frac{-dE_b}{(dE_b/dt)} = \frac{\tau_{be}^\epsilon}{1,5} \ln \left(1 + \left(\frac{E}{E_{cr}} \right)^{3/2} \right),$$

$$\frac{1}{\tau_{be}^\epsilon} = \frac{Z^2 n_e e^4 \ln \Lambda}{(2\pi)^{1/2} 3\pi\epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T_e)^{3/2}} \frac{m_e}{m_b}, \quad (2.34)$$

где τ_{be}^ϵ — время релаксации энергии ионов пучка на электронах.

§ 2.7. Убегающие электроны, поле Драйсера

Если к плазме приложено однородное электрическое поле \mathbf{E} , то движение пробного электрона описывается уравнением

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{1}{\tau_{ee}(v)} m_e \mathbf{v},$$

где

$$\frac{1}{\tau_{ee}} = n_e \sigma v = \frac{e^4 \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v^3}.$$

Член, ответственный за торможение, уменьшается с ростом скорости v и становится меньше ускоряющего члена $|-e\mathbf{E}|$ при

критической скорости $v_{\text{ср}}$. Если $v > v_{\text{ср}}$, то пробная частица ускоряется. Замедляющий член становится меньше, и скорость начинает неограниченно расти. Такой электрон называется *убегающим*. Критическая скорость задается соотношением

$$\frac{m_e v_{\text{ср}}^2}{2e} = \frac{e^2 n \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 E}. \quad (2.35)$$

Электрическое поле, необходимое для достижения электроном критической скорости $v_{\text{ср}}$, называется *драйсеровским*. Для $\ln \Lambda = 20$ находим

$$\frac{m_e v_{\text{ср}}^2}{2e} = 5 \cdot 10^{-16} \frac{n}{E}.$$

Если $n = 10^{19} \text{ м}^{-3}$, $E = 1 \text{ В/м}$, то электроны с энергией, больше 5 кэВ, становятся убегающими.

§ 2.8. Электрическое сопротивление, омический нагрев

Если к плазме приложено электрическое поле, меньшее чем поле Драйсера, то электроны испытывают ускорение в поле и торможение за счет соударений с ионами и, в итоге, находятся в равновесии, определяемом следующим соотношением:

$$\frac{m_e (v_e - v_i)}{\tau_{ei}} = -eE.$$

Плотность тока j , вызываемого электрическим полем, равна

$$j = -en_e (v_e - v_i) = \frac{e^2 n_e \tau_{ei}}{m_e} E.$$

Удельное электрическое сопротивление, определяемое формулой $\eta j = E$, равно [4] (в Ом · м)

$$\begin{aligned} \eta = \frac{m_e \nu_{ei||}}{n_e e^2} &= \frac{(m_e)^{1/2} Z e^2 \ln \Lambda}{51,6\pi^{1/2} \epsilon_0^2} (\kappa T_e)^{-3/2} = \\ &= 5,2 \cdot 10^{-5} Z \ln \Lambda \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Удельное электрическое сопротивление плазмы с $T_e = 1 \text{ кэВ}$, $Z = 1$ равно $\eta = 3,3 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$, что немного выше, чем удельное электрическое сопротивление меди при 20°С , $1,8 \times 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$. При протекании электрического тока с плотностью j мощность ηj^2 (на единицу объема) вкладывается в нагрев электронов. Такой механизм нагрева называется *омическим*.

§ 2.9. Многообразие временных и пространственных масштабов в плазме

В этом разделе описаны характеристики плазмы различного типа. Характерными временными масштабами в плазме являются периоды электронных плазменных колебаний $2\pi/\Pi_e$, электронного $2\pi/\Omega_e$ и ионного $2\pi/|\Omega_i|$ циклотронного вращения, времена электрон-ионных τ_{ei} и ион-ионных τ_{ii} столкновений и время электрон-ионной передачи энергии τ_{ei}^ϵ . Альфвеновская скорость v_A , т. е. скорость распространения магнитного возмущения, такова, что $v_A^2 = B^2/(2\mu_0\rho_m)$ (ρ_m — массовая плотность) (см. гл. 5, 10). Характерным магнитогидродинамическим временным масштабом служит альфвеновское время $\tau_H = L/v_A$, где L — размер плазмы. В среде с конечным удельным сопротивлением η электрическое поле диффундирует за характерное время $\tau_R = \mu_0 L^2/\eta$ (см. гл. 5). Это время называется временем резистивной диффузии.

Характерные масштабы длины — дебаевская длина λ_D , ларморовские радиусы электрона ρ_{Ω_e} и иона ρ_{Ω_i} , длина свободного пробега λ_{ei} при электрон-ионных столкновениях и размер плазмы L .

Соотношения между пространственными и временными масштабами таковы: $\lambda_D \Pi_e = v_{Te}$, $\rho_{\Omega_e} \Omega_e = v_{Te}$, $\rho_{\Omega_i} |\Omega_i| = v_{Ti}$, $\lambda_{ei}/\tau_{ei} \approx \approx 3^{1/2} v_{Te}$, $\lambda_{ii}/\tau_{ii} \approx 3^{1/2} v_{Ti}$, $L/\tau_H = v_A$, где v_{Te} , v_{Ti} — тепловые скорости, $v_{Te}^2 = \kappa T_e/m_e$, $v_{Ti}^2 = \kappa T_i/m_i$. Дрейфовая скорость ведущего центра по порядку величины равна $v_{drift} \sim \kappa T/eBL = v_T(\rho\Omega/L)$. Ниже приведены параметры типичной термоядерной D-T плазмы с $n_e = 10^{20} \text{ м}^{-3}$, $\kappa T_e = \kappa T_i = 10 \text{ кэВ}$, $B = 5 \text{ Т}$, $L = 1 \text{ м}$:

$$\begin{array}{lll}
 2\pi/\Pi_e = 11,1 \text{ пс} & (\Pi_e/2\pi = 89,8 \text{ ГГц}) & \lambda_D = 74,5 \text{ мкм} \\
 2\pi/\Omega_e = 7,1 \text{ пс} & (\Omega_e/2\pi = 140 \text{ ГГц}) & \rho_{\Omega_e} = 47,6 \text{ мкм} \\
 2\pi/|\Omega_i| = 26 \text{ нс} & (|\Omega_i|/2\pi = 38 \text{ МГц}) & \rho_{\Omega_i} = 2,88 \text{ мм} \\
 \tau_{ei} = 0,34 \text{ мс} & & \lambda_{ei} = 25 \text{ км} \\
 \tau_{ii} = 5,6 \text{ мс} & & \lambda_{ii} = 9,5 \text{ км} \\
 \tau_{ei}^\epsilon = 0,3 \text{ с} & & \\
 \tau_H = 0,13 \text{ мкс} & & \\
 \tau_R = 1,2 \cdot 10^3 \text{ с.} & &
 \end{array}$$

Диапазоны временных и пространственных масштабов составляют $\tau_R \Pi_e \sim 10^{14}$, $\lambda_{ei}/\lambda_D \sim 1,6 \cdot 10^8$, что предопределяет сложность и многообразие плазменных явлений.

Список литературы

1. Сивухин Д.В. В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4 / Под ред. Леонтовича М.А. — М.: Атомиздат, 1964.
2. Miyamoto K. Plasma Physics for Nuclear Fusion. — Revised Edition. — The MIT Press, Cambridge, Mass., 1989. Chap. 4.
3. Stix T.H. Plasma Phys. 1972. V. 14. P. 367.
4. Spitzer L., Jr. Physics of Fully Ionized Gases. N. Y.: Interscience, 1962. Русский перевод: Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. — 2 изд. — М.: Мир, 1965.

Глава 3

КОНФИГУРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ

В этой главе подробно исследуется движение отдельных заряженных частиц в магнитном поле более общего вида. В плазме содержится большое количество заряженных частиц, их движение само влияет на магнитное поле, но здесь этим влиянием пренебрегается.

§ 3.1. Уравнения Максвелла

Обозначим напряженность электрического поля, магнитную индукцию, электрическую индукцию и напряженность магнитного поля буквами \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , и \mathbf{H} , соответственно. Если плотность зарядов и плотность тока обозначить как ρ и \mathbf{j} соответственно, уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (3.4)$$

Величины ρ и \mathbf{j} удовлетворяют соотношению

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.5)$$

Уравнения (3.2), (3.4) и (3.5) связаны между собой благодаря току смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$. Из (3.3) следует, что вектор \mathbf{B} может быть представлен как ротор вектора \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (3.6)$$

\mathbf{A} называют *векторным потенциалом*. Если (3.6) подставить в (3.1), получим

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Величина в скобках может быть выражена через *скалярный потенциал* ϕ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Так как любая другая пара ϕ' и \mathbf{A}' , такая что

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \nabla\psi, \quad (3.9)$$

$$\phi' = \phi + \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad (3.10)$$

тоже удовлетворяет (3.6), (3.8) при произвольном ψ , то ϕ' и \mathbf{A}' определены не единственным образом.

Когда среда однородна и изотропна, \mathbf{B} и \mathbf{D} выражаются через напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} следующим образом:

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}.$$

ϵ и μ называют *диэлектрической* и *магнитной проницаемостью* соответственно. В вакууме ϵ_0 и μ_0 имеют следующие значения:

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ Кл}^2 \cdot \text{с}^2 / (\text{кг} \cdot \text{м}^3) = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м},$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{Кл}^2 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м},$$

так что

$$\frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2.$$

Здесь c — скорость света в вакууме, а Кл обозначает единицу заряда (Кулон).

Плазма в магнитном поле анизотропна, так что ϵ и μ являются, вообще говоря, тензорами. В вакууме уравнения (3.2), (3.4) могут быть сведены к

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{j}, \quad (3.11)$$

$$\nabla^2\phi + \nabla \cdot \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho. \quad (3.12)$$

Так как ϕ и \mathbf{A} имеют произвол в ψ (см. (3.9), (3.10)), мы наложим дополнительное условие (условие Лоренца)

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0. \quad (3.13)$$

Тогда (3.11), (3.12) сводятся к волновым уравнениям

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad (3.14)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.15)$$

При выводе (3.15) использовано векторное соотношение

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) = -\nabla^2 \mathbf{a},$$

которое справедливо лишь в декартовых¹⁾ координатах (x, y, z) . Скорость распространения электромагнитного поля в вакууме есть $1/(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} = c$.

Если поля не меняются со временем, соответствующие уравнения сводятся к

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \phi, & \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho, & \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu_0 \mathbf{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0. \end{aligned}$$

Скалярный и векторный потенциалы ϕ и \mathbf{A} в точке наблюдения P , заданной радиус-вектором \mathbf{r} , выражаются через плотности заряда и тока в точке Q (заданной \mathbf{r}') формулами (см. рис. 3.1)

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{R} d\mathbf{r}', \quad (3.16)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} d\mathbf{r}' \quad (3.17)$$

где $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $R = |\mathbf{R}|$ и $d\mathbf{r}' \equiv dx' dy' dz'$. Следовательно, \mathbf{E} и \mathbf{B} даются выражениями

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{R}}{R^3} \rho d\mathbf{r}', \quad (3.18)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{R}}{R^3} d\mathbf{r}'. \quad (3.19)$$

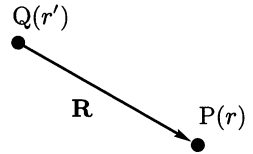


Рис. 3.1. Точка наблюдения P и положение Q заряда и тока

¹⁾ В действительности, это точное векторное соотношение. При расписывании же его компонент надо учитывать возможное действие дифференциальных операторов на базисные векторы. — *Примеч. ред.*

Если задан ток I , текущий по замкнутому проводнику C , напряженность магнитного поля описывается законом Био—Савара

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{n}}{R^2} ds, \quad (3.20)$$

где \mathbf{s} и \mathbf{n} — единичные векторы в направлениях ds ¹⁾ и \mathbf{R} соответственно.

§ 3.2. Магнитная поверхность

Силовая линия магнитного поля удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{dl}{B}, \quad (3.21)$$

где l — координата вдоль силовой линии $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Магнитная поверхность $\psi(\mathbf{r}) = \text{const}$, на которой лежат все силовые линии удовлетворяет условию

$$(\nabla\psi(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.22)$$

Вектор $\nabla\psi(\mathbf{r})$, нормальный к магнитной поверхности, должен быть ортогонален \mathbf{B} (см. рис. 3.2).

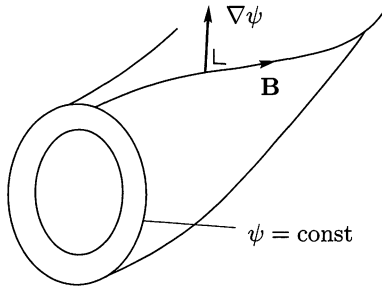


Рис. 3.2. Магнитная поверхность $\psi = \text{const}$, нормаль $\nabla\psi$ и магнитная силовая линия

В цилиндрических координатах (r, θ, z) магнитное поле \mathbf{B} задается формулами

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z},$$

¹⁾ Точнее, \mathbf{s} — единичный вектор к контуру C . Направление \mathbf{s} выбрано совпадающим с направлением обхода контура, при котором ограниченная контуром область остается слева. — *Примеч. ред.*

$$B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (3.23)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.$$

В случае осесимметричной конфигурации ($\partial/\partial\theta = 0$) величина

$$\psi(r, z) = r A_\theta(r, z) \quad (3.24)$$

удовлетворяет условию (3.22) для магнитной поверхности: $B_r \partial(r A_\theta)/\partial r + B_\theta \cdot 0 + B_z \partial(r A_\theta)/\partial z = 0$.

Магнитная поверхность в случае трансляционной симметрии ($\partial/\partial z = 0$) определяется соотношением

$$\psi(r, \theta) = A_z(r, \theta), \quad (3.25)$$

а магнитная поверхность в случае винтовой симметрии, при которой ψ является функцией r и $\theta - \alpha z$, задается уравнением

$$\psi(r, \theta - \alpha z) = A_z(r, \theta - \alpha z) + \alpha r A_\theta(r, \theta - \alpha z), \quad (3.26)$$

где α характеризует шаг винта.

§ 3.3. Уравнение движения заряженной частицы

Уравнение движения частицы массой m и с зарядом q в электромагнитном поле \mathbf{E} , \mathbf{B} имеет вид

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = q \left(\mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right). \quad (3.27)$$

Так как сила Лоренца, выражаемая вторым членом в правой части (3.27), ортогональна скорости \mathbf{v} , скалярное произведение силы Лоренца и \mathbf{v} равно нулю. Кинетическая энергия удовлетворяет уравнению

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = q \int_{t=t_0}^t \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Если электрическое поле равно нулю, кинетическая энергия заряженной частицы сохраняется. В декартовых координатах (x, y, z) x -компонента уравнения (3.27) записывается как $m d^2 x / dt^2 = q (E_x + (dy/dt) B_z - (dz/dt) B_y)$. Однако радиальная компонента (3.27) в цилиндрических координатах (r, θ, z) $m d^2 r / dt^2 \neq q (E_r + r (d\theta/dt) B_z - (dz/dt) B_\theta)$. Это указывает на то, что форма уравнения (3.27) не сохраняется при преобразо-

вании координат. Если применяются обобщенные координаты q_i ($i = 1, 2, 3$), необходимо использовать формализм уравнений Лагранжа. Лагранжиан заряженной частицы в поле со скалярным и векторным потенциалами ϕ , \mathbf{A} имеет вид

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = \frac{mv^2}{2} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\phi. \quad (3.28)$$

Лагранжиан в декартовых и цилиндрических координатах определяется выражениями

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - q\phi, \\ L(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) + q(\dot{r}A_r + r\dot{\theta}A_\theta + \dot{z}A_z) - q\phi \end{aligned}$$

соответственно. Уравнение движения в форме Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.29)$$

Подстановка (3.28) в (3.29) в случае декартовых координат дает

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(mv_x + qA_x) - q \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= 0, \\ m\ddot{x} = q \left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \left(\frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= \\ &= q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x, \end{aligned}$$

что эквивалентно (3.27). Уравнение Лагранжа в цилиндрических координатах имеет вид $m\ddot{r} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_r + m(r\dot{\theta})^2/r$, в котором появляется член с центробежной силой.

Гамильтонова форма уравнения движения сохраняется при канонических преобразованиях — преобразованиях более общих, чем преобразования координат. В этом формализме в дополнение к пространственным координатам (q_i) вводятся импульсы

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad (3.30)$$

причем p_i рассматриваются как независимые переменные. Тогда мы можем выразить из (3.30) \dot{q}_i как функцию (q_j, p_j, t) :

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t). \quad (3.31)$$

Гамильтониан $H(q_i, p_i, t)$ задается выражением

$$H(q_i, p_i, t) \equiv -L(q_i, \dot{q}_i(q_j, p_j, t), t) + \sum_i p_i \dot{q}_i(q_j, p_j, t). \quad (3.32)$$

Для примера выпишем x -компоненту импульса p_x в декартовых координатах и θ -компоненту p_θ в цилиндрических координатах:

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x} + qA_x, & \dot{x} &= (p_x - qA_x)/m, \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} + qrA_\theta, & \dot{\theta} &= (p_\theta - qrA_\theta)/(mr^2). \end{aligned}$$

Гамильтониан в декартовых координатах есть

$$H = \frac{1}{2m} ((p_x - qA_x)^2 + (p_y - qA_y)^2 + (p_z - qA_z)^2) + q\phi(x, y, z, t),$$

а гамильтониан в цилиндрических координатах —

$$H = \frac{1}{2m} \left((p_r - qA_r)^2 + \frac{(p_\theta - qrA_\theta)^2}{r^2} + (p_z - qA_z)^2 \right) + q\phi(r, \theta, z, t).$$

Вариация лагранжиана L определяется формулой

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) = \sum_i (\dot{p}_i \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i) = \\ &= \delta \left(\sum_i p_i \dot{q}_i \right) + \sum_i (\dot{p}_i \delta q_i - \dot{q}_i \delta p_i), \end{aligned}$$

и видно, что

$$\begin{aligned} \delta(-L + \sum_i p_i \dot{q}_i) &= \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i), \\ \delta H(q_i, p_i, t) &= \sum_i (\dot{q}_i \delta p_i - \dot{p}_i \delta q_i). \end{aligned}$$

Следовательно, гамильтоново уравнение движения сводится к

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.33)$$

Уравнения (3.33) в декартовых координатах принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p_x - qA_x}{m}, & \frac{dp_x}{dt} &= \frac{q}{m} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) - q \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{dp_x}{dt} - q \frac{dA_x}{dt} = \\ &= q \left[\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x} - \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) A_x \right) \right] = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_x, \end{aligned}$$

и, как было показано, (3.33) эквивалентно (3.27).

Если H не зависит от t явно, т. е. ϕ , \mathbf{A} не зависят от t , то

$$\frac{dH(q_i, p_i)}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = 0.$$

Следовательно,

$$H(q_i, p_i) = \text{const}, \quad (3.34)$$

т. е. является интегралом гамильтоновых уравнений. Этот интеграл отражает закон сохранения энергии.

Если электромагнитное поле осесимметрично, то, как видно из (3.33), p_θ постоянно вследствие $\partial H/\partial \theta = 0$,

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} + qrA_\theta = \text{const}. \quad (3.35)$$

Это означает сохранение момента импульса. В случае трансляционной симметрии ($\partial/\partial z = 0$) имеем

$$p_z = m\dot{z} + qA_z = \text{const}. \quad (3.36)$$

§ 3.4. Траектория заряженной частицы в осесимметричной системе

Координаты (r^*, θ^*, z^*) на магнитной поверхности осесимметричного поля удовлетворяют равенству

$$\psi = r^* A_\theta(r^*, z^*) = c_M.$$

С другой стороны, координаты (r, θ, z) траектории частицы определяются сохранением момента импульса (3.35):

$$rA_\theta(r, z) + \frac{m}{q}r^2\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{q} = \text{const}.$$

Выберем c_M , равным p_θ/q , тогда соотношение между магнитной поверхностью и траекторией частицы сводится к

$$rA_\theta(r, z) - r^*A_\theta(r^*, z^*) = -\frac{m}{q}r^2\dot{\theta}.$$

Расстояние δ (рис. 3.3) между магнитной поверхностью и траек-

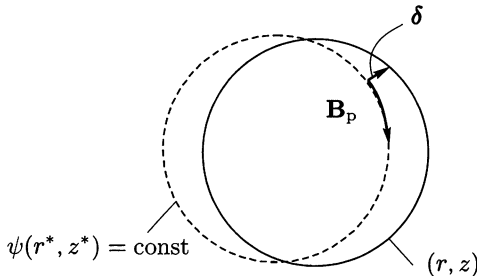


Рис. 3.3. Магнитная поверхность (пунктирная линия) и траектория частицы (сплошная линия)

торией определяется выражением

$$\begin{aligned}\delta &= (r - r^*)\mathbf{e}_r + (z - z^*)\mathbf{e}_z, \\ \delta \cdot \nabla(rA_\theta) &= -\frac{m}{q}r^2\dot{\theta}.\end{aligned}$$

Из соотношений $rB_r = -\partial(rA_\theta)/\partial z$, $rB_z = \partial(rA_\theta)/\partial r$ находим

$$[-(z - z^*)B_r + (r - r^*)B_z] = -\frac{m}{q}r\dot{\theta}.$$

Выражение в левой части равенства есть θ -компонента векторного произведения векторов $\mathbf{B}_p = (B_r, 0, B_z)$ и $\delta = (r - r^*, 0, z - z^*)$. Раскрывая, получим

$$(\mathbf{B}_p \times \delta)_\theta = -\frac{m}{q}r\dot{\theta}.$$

Обозначим величину полоидальной компоненты магнитного поля \mathbf{B}_p (компоненты в плоскости (rz)) как B_p . Имеем $-B_p\delta = -(m/q)v_\theta$ ($v_\theta = r\dot{\theta}$), и

$$\delta = \frac{mv_\theta}{qB_p} = \rho_{\Omega p}.$$

Эта величина равна ларморовскому радиусу по магнитному полю B_p и тангенциальной скорости v_θ . Если величина c_M выбрана равной $c_M = (p_\theta - m\langle rv_\theta \rangle)/q$ ($\langle rv_\theta \rangle$ — среднее от rv_θ), находим

$$\delta = \frac{m}{qB_p} \left(v_\theta - \frac{\langle rv_\theta \rangle}{r} \right). \quad (3.37)$$

В качестве простого примера осесимметричной системы рассмотрим поле каспа. Такое поле задается соотношениями

$$A_r = 0, \quad A_\theta = arz, \quad A_z = 0, \quad (3.38)$$

$$B_r = -ar, \quad B_\theta = 0, \quad B_z = 2az. \quad (3.39)$$

Из законов сохранения энергии (3.34) и момента импульса (3.35) находим

$$\begin{aligned}mr\dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{r} - qazr, \\ \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + \frac{(p_\theta - qar^2z)^2}{2mr^2} &= W \left(= \frac{m}{2}v_0^2 \right).\end{aligned}$$

Эти уравнения соответствуют движению частицы в потенциале $X = (p_\theta - qar^2z)^2/(2mr^2)$. Если электрическое поле равно нулю и кинетическая энергия частицы сохраняется, область, в которой

находятся траектории частицы с энергией $mv_0^2/2$, ограничена условием (см. рис. 3.4)

$$X = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\theta}{r} - qarz \right)^2 < \frac{mv_0^2}{2}.$$

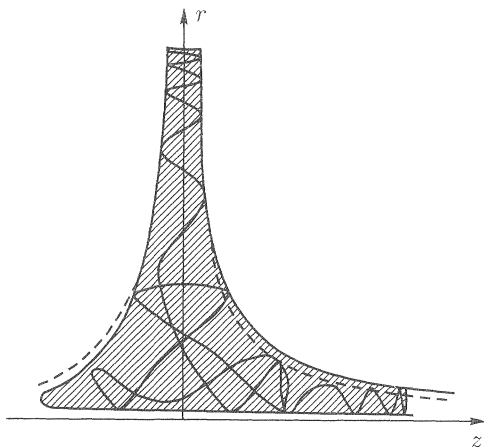


Рис. 3.4. Пунктир — магнитные силовые линии; сплошные линии — траектории частиц в каспе

§ 3.5. Дрейф ведущего центра в тороидальном поле

Рассмотрим дрейф ведущего центра заряженной частицы в простом тороидальном поле ($B_r = 0$, $B_\varphi = B_0 R_0/R$, $B_z = 0$), заданном в цилиндрических координатах (R, φ, z) . φ -компонента B_φ называется тороидальным полем; B_φ уменьшается с удалением от оси z по закону $1/R$. В плоскости $z = \text{const}$ магнитные силовые линии образуют окружности вокруг оси z , которую называют *главной осью* тора. Как было описано в разд. 2.4, дрейфовая скорость ведущего центра задается уравнением

$$\mathbf{v}_G = v_{\parallel} \mathbf{e}_\varphi + \frac{m}{qB_\varphi R} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \mathbf{e}_z.$$

Частицы в этом простом торе быстро движутся в тороидальном направлении и медленно дрейфуют вдоль оси z со скоростью

$$v_{\text{dr}} = \frac{m}{qB_0 R_0} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \sim \left(\frac{\rho\Omega}{R_0} \right) v. \quad (3.40)$$

Этот дрейф называют *тороидальным дрейфом*. Ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях вдоль оси z . Вследствие результирующего разделения зарядов индуцируется электрическое поле \mathbf{E} , и ионы и электроны движутся вместе наружу из-за $\mathbf{E} \times \mathbf{V}/B^2$ дрейфа. Следовательно, простое тороидальное поле не может удерживать плазму (рис. 3.5), если разделение зарядов не нейтрализовано или электрически

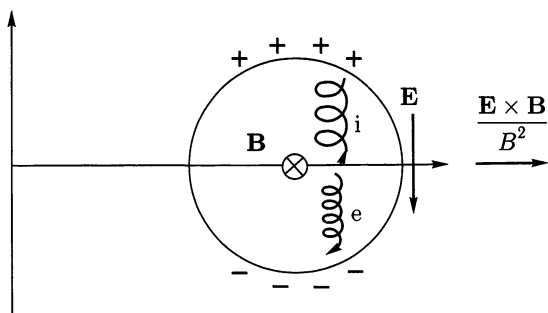


Рис. 3.5. Тороидальный дрейф

не замкнута каким-либо способом. Если магнитные силовые линии соединяют верхнюю и нижнюю области, как показано на рис. 3.6, разделение зарядов может быть замкнута, так как заряженные частицы могут свободно двигаться вдоль силовых линий. Если в тороидальной плазме возбужден ток, появляется компонента магнитного поля вокруг *магнитной оси*, как показано на рис. 3.6. Эта компонента \mathbf{V}_p называется *полюидальным магнитным полем*. Радиус магнитной оси R называют *большим радиусом* тора, а радиус a поперечного сечения плазмы — *малым радиусом*. Обозначим радиальную координату в поперечном сечении плазмы через r . Если магнитная силовая линия после обхода вокруг главной оси тора снова пересекает плоскость P , и точка пересечения при этом поворачивается вокруг магнитной

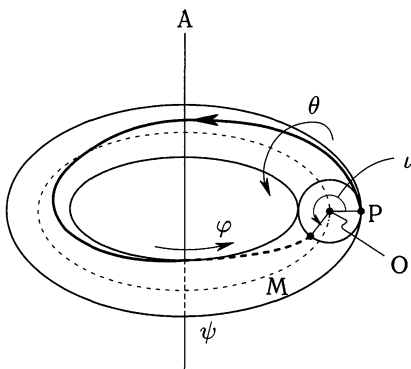


Рис. 3.6. Главная ось A , магнитная ось M тороидального поля и угол вращательного преобразования ι

оси z снова пересекает плоскость P , и точка пересечения при этом поворачивается вокруг магнитной

оси O на угол ι в плоскости P , то справедливо следующее соотношение:

$$\frac{r\iota}{2\pi R} = \frac{B_p}{B_\varphi}.$$

Угол ι называется *углом вращательного преобразования* и определяется формулой

$$\frac{\iota}{2\pi} = \frac{R B_p}{r B_\varphi}. \quad (3.41)$$

$A \equiv R/a$ называют *аспектным отношением*.

3.5а. Траектория ведущего центра пролетной частицы

Если частица вращается вокруг тора со скоростью v_{\parallel} , то время оборота равно $T = 2\pi R_0/v_{\parallel}$. Частица вращается вокруг магнитной оси с угловой скоростью

$$\omega = \frac{\iota}{T} = \frac{\iota v_{\parallel}}{2\pi R_0}$$

и дрейфует в направлении z со скоростью v_{dr} . Если ввести координату $x = R - R_0$, то траектория ведущего центра частицы определяется уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = -\omega z, \quad \frac{dz}{dt} = \omega x + v_{dr},$$

решение которых

$$\left(x + \frac{v_{dr}}{\omega}\right)^2 + z^2 = r^2.$$

Если существует вращательное преобразование, траектория частицы (в полоидальном сечении) становится замкнутым кругом, центр которого смещен от центра магнитной поверхности на величину

$$\Delta = -\frac{v_{dr}}{\omega} = -\frac{mv_{\parallel}}{qB_0} \frac{2\pi}{\iota} \left(1 + \frac{v_{\perp}^2}{2v_{\parallel}^2}\right), \quad (3.42)$$

$$|\Delta| \sim \rho_{\Omega} \left(\frac{2\pi}{\iota}\right),$$

где ρ_{Ω} — ларморовский радиус. Как видно из рис. 3.7, $\Delta < 0$ для случая $v_{\parallel} > 0$, $q > 0$ (ион), так как $v_{dr} > 0$, $\omega > 0$, и $\Delta > 0$ в случае $v_{\parallel} < 0$, $q > 0$ (ион).

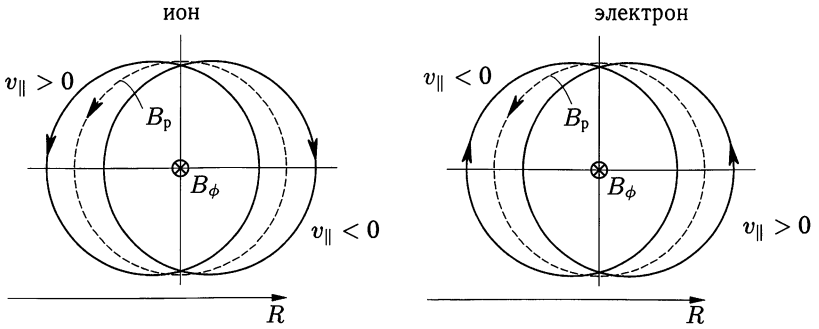


Рис. 3.7. Траектории (сплошные линии) ведущего центра пролетных ионов и электронов; магнитные поверхности (пунктир)

3.5б. Траектория ведущего центра запертой частицы

В случае $|B_\varphi| \gg |B_p|$ величина магнитного поля почти равна B_φ , и

$$B = \frac{B_0 R_0}{R} = \frac{B_0}{1 + (r/R_0) \cos \theta} \approx B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right).$$

Обозначим длину магнитной силовой линии l , а проекцию положения магнитной силовой линии на плоскость (R, z) будем характеризовать координатами (r, θ) , как показано на рис. 3.8. Так как выполнены соотношения

$$\frac{r\theta}{l} = \frac{B_p}{B_0}, \quad \theta = \frac{l}{r} \frac{B_p}{B_0} = \kappa l,$$

находим

$$B = B_0 \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos(\kappa l) \right).$$

Если $v_{||}$ (компонента скорости, параллельная магнитному полю) намного меньше, чем перпендикулярная магнитному полю ком-

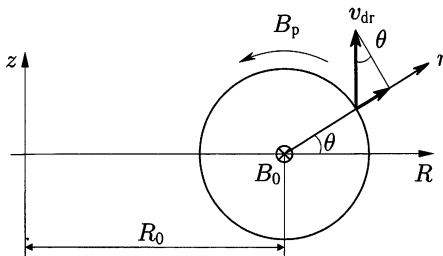


Рис. 3.8. (r, θ) -координаты

понента скорости v_{\perp} , и удовлетворяет условию

$$\frac{v_{\perp}^2}{v^2} > 1 - \frac{r}{R_0}, \quad \frac{v_{\parallel}^2}{v^2} < \frac{r}{R_0}, \quad (3.43)$$

то частица заперта снаружи в области слабого магнитного поля из-за эффекта отражения от пробок, как описано в разд. 2.5 (пробочное отношение здесь равно $(1/R_0)/(1/(R_0 + r))$). Такую частицу называют *запертой*. Пролетные частицы называют также незапертыми. Так как для запертых частиц $v_{\parallel}^2 \ll v_{\perp}^2$, то r -компонента тороидального дрейфа v_{dr} запертой частицы определяется выражением

$$\dot{r} = v_{dr} \sin \theta = \frac{m}{qB_0} \frac{v_{\perp}^2}{2R_0} \sin \theta.$$

Продольное движение ведущего центра задается уравнением (см. разд. 2.4)

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\frac{\mu_m}{m} \frac{\partial B}{\partial l},$$

$$\dot{v}_{\parallel} = -\frac{\mu_m}{m} \frac{r}{R_0} \kappa B_0 \sin \kappa l = -\frac{v_{\perp}^2}{2R_0} \frac{B_p}{B_0} \sin \theta,$$

решение которого

$$\frac{d}{dt} \left(r + \frac{m}{qB_p} v_{\parallel} \right) = 0,$$

$$r - r_0 = -\frac{m}{qB_p} v_{\parallel}. \quad (3.44)$$

Здесь $r = r_0$ означает радиальную координату точки поворота из-за пробочного эффекта. Так как траектория имеет форму банана, запертые частицы также иногда называют *банановыми* (см. рис. 3.9). Ширину банана Δ_b можно оценить как

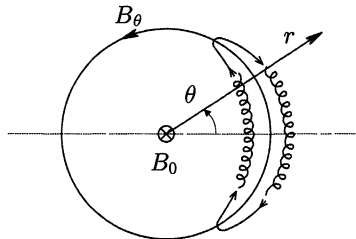


Рис. 3.9. Банановая траектория иона

$$\Delta_b = \frac{m}{qB_p} v_{\parallel} \sim \frac{mv v_{\parallel} B_0}{qB_0 v B_p} \sim \frac{B_0}{B_p} \left(\frac{r}{R_0} \right)^{1/2} \rho_{\Omega} \sim \left(\frac{R_0}{r} \right)^{1/2} \left(\frac{2\pi}{\iota} \right) \rho_{\Omega}. \quad (3.45)$$

§ 3.6. Траектория ведущего центра и магнитная поверхность

Выражение для скорости ведущего центра было выведено в разд. 2.4 в следующем виде:

$$\mathbf{v}_G = v_{\parallel} \mathbf{b} + \frac{1}{B} (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) + \frac{mv_{\perp}^2/2}{qB^2} (\mathbf{b} \times \nabla B) + \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} (\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{B}), \quad (3.46)$$

причем магнитный момент

$$\mu_m = mv_{\perp}^2/(2B) = \text{const.}$$

Если электрическое поле \mathbf{E} статическое и выражается как $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, энергия сохраняется,

$$\frac{m}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) + q\phi = W.$$

Тогда v_{\parallel} выражается формулой

$$v_{\parallel} = \pm \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} (W - q\phi - \mu_m B)^{1/2}. \quad (3.47)$$

Заметив, что v_{\parallel} есть функция координат, можно записать

$$\begin{aligned} \nabla \times (mv_{\parallel} \mathbf{b}) &= mv_{\parallel} \nabla \times \mathbf{b} + \nabla(mv_{\parallel}) \times \mathbf{b} = \\ &= mv_{\parallel} \nabla \times \mathbf{b} + \frac{1}{v_{\parallel}} (-q\nabla\phi - \mu_m \nabla B) \times \mathbf{b} \end{aligned}$$

и

$$\frac{v_{\parallel}}{qB} \nabla \times (mv_{\parallel} \mathbf{b}) = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB} \nabla \times \mathbf{b} + \frac{1}{B} (\mathbf{E} \times \mathbf{b}) + \frac{mv_{\perp}^2/2}{qB^2} (\mathbf{b} \times \nabla B).$$

Тогда уравнение (3.46) для \mathbf{v}_G принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= v_{\parallel} \mathbf{b} + \left(\frac{v_{\parallel}}{qB} \nabla \times (mv_{\parallel} \mathbf{b}) - \frac{mv_{\parallel}^2}{qB} \nabla \times \mathbf{b} \right) + \frac{mv_{\perp}^2}{qB^2} (\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{B}) = \\ &= v_{\parallel} \mathbf{b} + \frac{v_{\parallel}}{qB} \nabla \times (mv_{\parallel} \mathbf{b}) - \frac{mv_{\perp}^2}{qB} (\nabla \times \mathbf{b} - \mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Поскольку $\nabla(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{b} + 2\mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{b}) = 0$, т. к. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$ (см. Приложение «Математические формулы»), третье слагаемое в правой части уравнения для \mathbf{v}_G принимает вид $(\dots) = (\nabla \times \mathbf{b}) - (\nabla \times \mathbf{b})_{\perp} = (\nabla \times \mathbf{b})_{\parallel} = (\mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}))\mathbf{b}$. Так как $\nabla \times \mathbf{B} = B\nabla \times \mathbf{b} + \nabla B \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j}$, имеем $\mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 j_{\parallel} / B$. Отношение третьего слагаемого в правой части последнего уравнения к первому (оба параллельны магнитному полю) обычно мало. Если можно пренебречь третьим слагаемым, уравнение (3.46) для \mathbf{v}_G приводится к виду

$$\frac{d\mathbf{r}_G}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{B} \nabla \times \left(\mathbf{A} + \frac{mv_{\parallel}}{qB} \mathbf{B} \right). \quad (3.48)$$

Траектория ведущего центра совпадает с силовой линией магнитного поля $\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A}^*$ с векторным потенциалом

$$\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{A} + \frac{mv_{\parallel}}{qB} \mathbf{B}.$$

Аналогично разд. 3.2, *поверхность траекторий дрейфового движения* ведущего центра в случае осесимметричной конфигурации задается соотношением

$$rA_{\theta}^*(r, z) = \text{const}. \quad (3.49)$$

§ 3.7. Влияние продольного электрического поля на банановые орбиты

Для того чтобы возбудить ток в плазме, в токамаке индуцируют тороидальное электрическое поле. Ведущий центр частицы дрейфует со скоростью $\mathbf{E} \times \mathbf{B} / B^2$, но центр банана движется другим образом. Тороидальное электрическое поле может быть описано в координатах (R, φ, z) как

$$E_{\varphi} = -\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t}.$$

Так как момент импульса сохраняется, то

$$R(mR\dot{\varphi} + qA_{\varphi}) = \text{const}.$$

Усредняя предыдущее уравнение по ларморовскому периоду и используя соотношение

$$\langle R\dot{\varphi} \rangle = \frac{B_{\varphi}}{B} v_{\parallel},$$

находим

$$R \left(mv_{\parallel} \frac{B_{\varphi}}{B} + qA_{\varphi} \right) = \text{const}. \quad (3.50)$$

Для банановых частиц ($v_{\parallel} \ll v_{\perp}$) величина v_{\parallel} обращается в нуль в точках поворота. Смещение точки поворота (R, Z) за период Δt можно получить из соотношения

$$0 = \Delta(RA_{\varphi}(R, Z)) = \Delta r \frac{\partial}{\partial r} RA_{\varphi} + \frac{\Delta}{t} \frac{\partial}{\partial t} RA_{\varphi},$$

где r — радиальная координата магнитной поверхности. Производные RA_{φ} по φ и θ равны нулю, так как $RA_{\varphi} = \text{const}$ на магнитной поверхности. С помощью соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (RA_{\varphi}) &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial (RA_{\varphi})}{\partial R} + \frac{\partial Z}{\partial r} \frac{\partial (RA_{\varphi})}{\partial Z} \right) = \\ &= \cos \theta B_Z - \sin \theta B_R = B_p \end{aligned}$$

получаем скорость дрейфа

$$\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{E_{\theta}}{B_p}. \quad (3.51)$$

Если принять во внимание знак полоидального поля B_p , созданного током, индуцированным электрическим полем E_{φ} (см. рис. 3.10), то знак $\Delta r/\Delta t$ оказывается отрицательным, и центр банана движется по направлению к главной оси тора. Так как $|B_p| \ll |B_{\varphi}| \approx B$, скорость дрейфа центра банана в $(B/B_p)^2$ раз больше, чем скорость дрейфа ведущего центра частицы $E_{\varphi} B_p/B^2$. Это явление называется *пинчем Уэйра*.

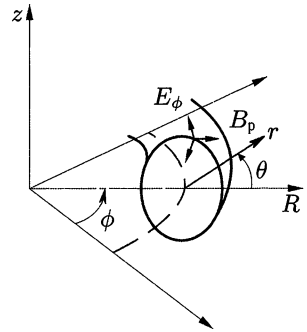


Рис. 3.10. Координатная система для объяснения пинча Уэйра

Глава 4

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЕЙ И УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Плазма состоит из большого количества ионов и электронов, и проследить индивидуальное поведение каждой частицы весьма сложно. Вместо этого можно рассматривать статистически усредненные величины. Для того чтобы описать свойства плазмы, необходимо найти функцию распределения, которая определяет плотность числа частиц в фазовом пространстве, т. е. в пространстве координат и скоростей частиц. Функция распределения не обязана быть стационарной. В разд. 4.1 основное уравнение, определяющее функцию распределения $F(q_i, p_i, t)$, выводится посредством теоремы Лиувилля. Уравнение Больцмана для функции распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ сформулировано в разд. 4.2. Уравнение Больцмана без интеграла столкновений называют уравнением Власова.

§ 4.1. Фазовое пространство и функция распределения

Состояние частицы можно задать координатами (x, y, z) , скоростью (v_x, v_y, v_z) и временем t . В общем случае оно описывается каноническими переменными $q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3$ и t в фазовом пространстве. Движение частиц в фазовом пространстве подчиняется уравнениям Гамильтона:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_i}. \quad (4.1)$$

При движении, согласно теореме Лиувилля, сохраняется бесконечно малый объем фазового пространства канонических переменных $\Delta = \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3 \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3$, так что

$$\frac{d\Delta}{dt} = 0. \quad (4.2)$$

Пусть число частиц δN в малом объеме фазового пространства равно

$$\delta N = F(q_i, p_i, t) \delta \mathbf{q} \delta \mathbf{p}, \quad (4.3)$$

где $\delta\mathbf{q} = \delta q_1 \delta q_2 \delta q_3$, $\delta\mathbf{p} = \delta p_1 \delta p_2 \delta p_3$, а $F(q_i, p_i, t)$ — функция распределения в фазовом пространстве.

Малый объем фазового пространства сохраняется, если частицы движутся согласно уравнению движения и не рассеиваются посредством столкновений. А поскольку число частиц δN в этом малом объеме фазового пространства тоже сохраняется, то и функция распределения ($F = \delta N / \Delta$) является константой на траектории, т. е. полная производная от нее по времени будет равна нулю:

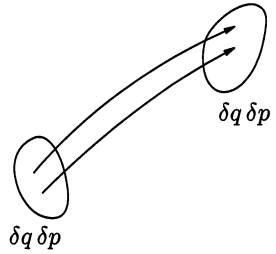


Рис. 4.1. Движение частиц в фазовом пространстве

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = 0. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Ранее мы нигде не учитывали столкновения. Если обозначить изменение F , связанное со столкновениями, как $(\delta F / \delta t)_{\text{coll}}$, то выражение (4.4) преобразуется к

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) = \left(\frac{\delta F}{\delta t} \right)_{\text{coll}}. \quad (4.5)$$

§ 4.2. Уравнения Больцмана и Власова

Будем вместо канонических переменных использовать скорость и пространственные координаты $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$. Гамильтониан в новых координатах имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi, \quad (4.6)$$

где

$$p_i = mv_i + qA_i, \quad (4.7)$$

$$q_i = x_i \quad (4.8)$$

и

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i, \quad (4.9)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_k \frac{(p_k - qA_k)}{m} q \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - q \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (4.10)$$

При этом, уравнение (4.5) переходит в

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=k}^3 v_k \frac{\partial F}{\partial x_k} + q \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{\partial F}{\partial p_i} = \left(\frac{\delta F}{\delta t} \right)_{\text{coll}}. \quad (4.11)$$

Переход от независимых переменных (q_i, p_i, t) к (x_j, v_j, t) делается с использованием (4.7), (4.8) и соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_j(x_k, p_k, t)}{\partial p_i} &= \frac{1}{m} \delta_{ij}, \\ \frac{\partial v_j(x_k, p_k, t)}{\partial x_i} &= -\frac{q}{m} \frac{\partial A_j}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial v_j(x_k, p_k, t)}{\partial t} &= -\frac{q}{m} \frac{\partial A_j}{\partial t}. \end{aligned}$$

Обозначим $F(x_i, p_i, t) = F(x_i, p_i(x_j, v_j, t), t) \equiv f(x_j, v_j, t)/m^3$. Тогда $m^3 F(x_h, p_h, t) = f(x_j, v_j(x_h, p_h, t), t)$, и

$$m^3 \frac{\partial}{\partial p_i} F(x_h, p_h, t) = \frac{\partial}{\partial p_i} f(x_j, v_j(x_h, p_h, t), t) = \sum_j \frac{\partial f}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial p_i} = \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{1}{m},$$

$$\begin{aligned} m^3 \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_h, p_h, t) &= \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_i, v_i(x_h, p_h, t), t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^3 \frac{\partial}{\partial t} F(x_h, p_h, t) &= \frac{\partial}{\partial t} f(x_i, v_i(x_h, p_h, t), t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial t}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение (4.11) преобразуется к

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_k v_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial v_i} \left(\frac{-q}{m} \right) \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) + \\ + \sum_i \left(\sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{q}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \left(-\frac{\partial A_i}{\partial t} - \sum_k v_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + \sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \frac{q}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}}.$$

В силу соотношения

$$\sum_k v_k \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \sum_k v_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}))_i = \sum_k v_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_i,$$

имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_i \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}}. \quad (4.12)$$

Это уравнение называется *уравнением Больцмана*.

Плотность заряда ρ и электрический ток \mathbf{j} определяются как

$$\rho = \sum_{i,e} q \int f dv_1 dv_2 dv_3, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{i,e} q \int \mathbf{v} f dv_1 dv_2 dv_3. \quad (4.14)$$

Соответственно, уравнения Максвелла выглядят так:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q \int f d\mathbf{v} \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sum q \int \mathbf{v} f d\mathbf{v}, \quad (4.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.18)$$

В случае разреженной плазмы можно пренебречь интегралом столкновений $(\delta f / \delta t)_{\text{coll}}$. Однако взаимодействие заряженных частиц, по-прежнему, учитывается через самосогласованные электрические и магнитные поля, которые вычисляются из плотностей заряда и тока с помощью уравнений Максвелла. Плотности же заряда и тока сами определяются функцией распределения для электронов и ионов. Такое уравнение называется *уравнением Больцмана без столкновений* или *уравнением Власова*.

Если в качестве оператора, описывающего столкновения, подставить *интеграл столкновений в форме Фоккера—Планка* [1],

то полученное уравнение называется *уравнением Фоккера—Планка* (см. 16.8).

Список литературы

1. *Сивухин Д.В.* В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 4 / Под ред. *Леонтовича М.А.* — М.: Атомиздат, 1966. *Miyamoto K.* Plasma Physics for Nuclear Fusion. — Revised Edition. — The MIT Press, Cambridge, Mass., 1989. Chap. 4.

ПЛАЗМА КАК ПРОВОДЯЩАЯ ЖИДКОСТЬ

§ 5.1. Уравнения двужидкостной магнитной гидродинамики

Плазма может быть описана в рамках магнитной гидродинамики как смесь ионной и электронной жидкостей со своими плотностями ρ_{mi} , ρ_{me} , массовыми скоростями \mathbf{V}_i , \mathbf{V}_e и давлениями p_i , p_e , а также с плотностями заряда и тока в смеси ρ и \mathbf{j} соответственно. Эти физические величины могут быть получены путем соответствующих усреднений по пространству скоростей функций распределения $f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ионов и электронов, введенных в гл. 4. Концентрация n_i и плотность ρ_{mi} ионов, а также их массовая скорость $\mathbf{V}_i(\mathbf{r}, t)$ выражаются как

$$n_i(\mathbf{r}, t) = \int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (5.1)$$

$$\rho_{mi}(\mathbf{r}, t) = m_i n_i(\mathbf{r}, t), \quad (5.2)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathbf{v} f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}} = \frac{1}{n_i(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (5.3)$$

Соответствующие выражения для электронов аналогичны. Магнитная гидродинамика оперирует с усредненными по пространству скоростей величинами и не учитывает явления, связанные с формой функции распределения в пространстве скоростей (гл. 11). Единственными независимыми переменными остаются \mathbf{r} и t , что, однако, не мешает учитывать сложную геометрию пространственных конфигураций.

Уравнениями магнитной гидродинамики называют следующий набор:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{V}_e) = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{V}_i) = 0, \quad (5.5)$$

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{V}_e}{dt} = -\nabla p_e - en_e(\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}, \quad (5.6)$$

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = -\nabla p_i + Zen_i(\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R}. \quad (5.7)$$

Здесь \mathbf{R} означает силу трения, действующую на электронную жидкость со стороны ионной (за счет соударений частиц разного сорта), соответственно сила трения ионов об электроны равна $-\mathbf{R}$.

Изменение числа частиц $n(x, y, z, t)\Delta x\Delta y\Delta z$ в объеме $\Delta x\Delta y\Delta z$ есть разность между потоком налетающих на поверхность A на рис. 5.1 частиц $n(x, y, z, t)V_x(x, y, z, t)\Delta y\Delta z$

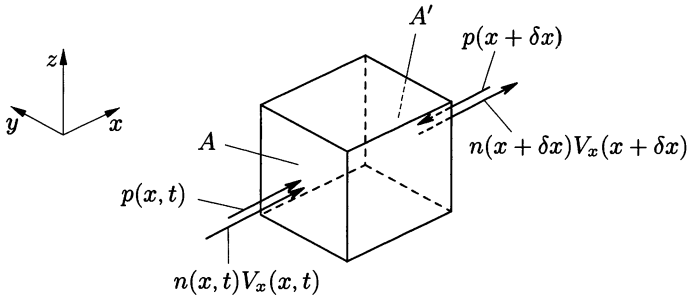


Рис. 5.1. Поток частиц и сила давления

и потоком $n(x + \Delta x, y, z, t)V_x(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y\Delta z$ частиц, вылетающих через поверхность A' :

$$\begin{aligned} (n(x, y, z, t)V_x(x, y, z, t) - n(x + \Delta x, y, z, t)V_x(x + \Delta x, y, z, t))\Delta y\Delta z = \\ = -\frac{\partial(nV_x)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z. \end{aligned}$$

Если принять во внимание потоки частиц и через остальные поверхности данного объема, то мы придем к уравнению (5.4), сразу следующему из соотношения

$$\frac{\partial n}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z = -\left(\frac{\partial(nV_x)}{\partial x} + \frac{\partial(nV_y)}{\partial y} + \frac{\partial(nV_z)}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Член $-\nabla p$ в (5.6), (5.7) — сила давления p , действующая на единичный объем плазмы, что можно пояснить следующим образом. Сила, приложенная к поверхности A (рис. 5.1), равна $p(x, y, z, t)\Delta y\Delta z$, а сила, приложенная к поверхности A' , равна $-p(x + \Delta x, y, z, t)\Delta y\Delta z$. Поэтому сумма двух этих сил в направлении x есть

$$(-p(x + \Delta x, y, z, t) + p(x, y, z, t))\Delta y\Delta z = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Если учесть воздействие давления на остальные поверхности, получим, что на единичный объем действует результирующая сила давления, равная

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) = -\nabla p,$$

где $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ — единичные векторы в x , y , z направлениях соответственно. Второй член в правой части уравнений (5.6), (5.7) — сила Лоренца, действующая на единичный объем плазмы. Третий член, как уже отмечалось выше и в разд. 2.8, — это сила трения, возникающая в результате электрон-ионных соударений. Ее можно представить в виде

$$\mathbf{R} = -n_e m_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) \nu_{ei}, \quad (5.8)$$

где ν_{ei} — частота кулоновских столкновений ионов и электронов.

Рассмотрим полную производную по времени в левой части уравнения движения. Массовая скорость \mathbf{V} является функцией пространственных координат \mathbf{r} и времени t . Тогда ускорение малого объема жидкости есть

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla\right) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения (5.6), (5.7) приводятся к виду

$$n_e m_e \left(\frac{\partial \mathbf{V}_e}{\partial t} + (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e \right) = -\nabla p_e - en_e (\mathbf{E} + \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}, \quad (5.9)$$

$$n_i m_i \left(\frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial t} + (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i \right) = -\nabla p_i + Zen_i (\mathbf{E} + \mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \mathbf{R}. \quad (5.10)$$

Уравнения непрерывности (сохранения числа частиц) (5.4), (5.5) и движения (5.9), (5.10) могут быть выведены из уравнения Больцмана (4.12). Действительно, прямое интегрирование уравнения Больцмана по пространству скоростей дает (5.4), (5.5),

интегрирование с весом $m\mathbf{v}$ дает (5.9), (5.10). Математическая процедура вывода описана в Приложении А.

§ 5.2. Одножидкостная магнитная гидродинамика

Поскольку отношение масс иона и электрона равно $m_i/m_e = 1836A$ (A — атомный вес иона), то вклад ионов в плотность плазмы преобладающий. Во многих случаях удобно преобразовать двухжидкостные уравнения движения в уравнение движения плазмы как целого и закон Ома.

Полная плотность плазмы ρ_m , ее массовая скорость \mathbf{V} , плотность заряда ρ и тока \mathbf{j} определяются следующим образом:

$$\rho_m = n_e m_e + n_i m_i, \quad (5.11)$$

$$\mathbf{V} = \frac{n_e m_e \mathbf{V}_e + n_i m_i \mathbf{V}_i}{\rho_m}, \quad (5.12)$$

$$\rho = -en_e + Zen_i, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{j} = -en_e \mathbf{V}_e + Zen_i \mathbf{V}_i. \quad (5.14)$$

Из уравнений (5.4), (5.5) следует, что

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (5.16)$$

Из (5.9), (5.10) находим:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_m}{\partial \mathbf{V}} \partial t + n_e m_e (\mathbf{V}_e \cdot \nabla) \mathbf{V}_e + n_i m_i (\mathbf{V}_i \cdot \nabla) \mathbf{V}_i = \\ = -\nabla(p_e + p_i) + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Зарядовая нейтральность плазмы позволяет считать $n_e \approx Zn_i$. Обозначая $\Delta n_e = n_e - Zn_i$, имеем

$$\begin{aligned} \rho_m = n_i m_i \left(1 + \frac{m_e}{m_i} Z\right), \quad p = p_i + p_e, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_i + \frac{m_e Z}{m_i} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i), \\ \rho = -e \Delta n_e, \quad \mathbf{j} = -en_e (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i). \end{aligned}$$

Так как $m_e/m_i \ll 1$, второй и третий члены в левой части (5.17) можно собрать как $(\mathbf{V} \cdot \Delta) \mathbf{V}$. Поскольку $\mathbf{V}_e = \mathbf{V}_i - \mathbf{j}/en_e \approx \mathbf{V} - \mathbf{j}/en_e$, то (5.9) сводится к

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e}\right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \frac{\mathbf{R}}{en_e} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}. \quad (5.18)$$

Используя удельное сопротивление η (см. разд. 2.8), силу трения \mathbf{R} можно представить как

$$\mathbf{R} = n_e \left(\frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2} \right) (-en_e)(\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) = n_e e \eta \mathbf{j}. \quad (5.19)$$

Уравнение (5.18) отвечает обобщенному закону Ома. Окончательно уравнение движения жидкости и обобщенный закон Ома записываются в виде

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{E} + \left(\mathbf{V} - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{en_e} \nabla p_e - \eta \mathbf{j} = \frac{m_e}{e^2 n_e} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \frac{m_e}{e} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \approx 0 \quad (5.21)$$

($|\omega/\Omega_e| \ll 1$).

Уравнения Максвелла и непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (5.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.24)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (5.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (5.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.27)$$

Из (5.25), (5.24) следует, что $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \partial \mathbf{j} / \partial t - \mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2$. Характерной скоростью распространения МГД волны или возмущения является альфвеновская скорость $v_A = B / (\mu_0 \rho_m)^{1/2}$ (см. разд. 5.4), которая обычно¹⁾ много меньше скорости света c , т. е. $\omega^2 / k^2 \sim v_A^2 \ll c^2$. Поскольку $|\nabla \times (\partial \mathbf{B} / \partial t)| = |\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}| \sim k^2 |\mathbf{E}|$ и $|\mu_0 \epsilon_0 \partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2| \sim \omega^2 |\mathbf{E}| / c^2$, то ток смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$ в (5.25) пренебрежимо мал. Отношение первого члена $(m_e/e) \partial \mathbf{j} / \partial t$ в правой части (5.21) и слагаемого $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ в левой части равно ω / Ω_e , так что если $|\omega / \Omega_e| \ll 1$, то первым членом можно пренебречь. Второй член $(m_e/e) \partial \mathbf{V} / \partial t$ в правой части (5.21) порядка члена $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ в левой части, умноженного на фактор $\sim \omega / \Omega_e$. Поэтому-то правую часть

¹⁾ Альфвеновская скорость, выступающая как фазовая скорость МГД волны, может и превышать c в плазме с низкой плотностью. — *Примеч. ред.*

(5.21) можно приближенно заменить нулем. Выразив $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ из уравнения (5.20), находим

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla p_i - \eta \mathbf{j} = \frac{\Delta n_e}{n_e} \mathbf{E} + \frac{m_i}{e} \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Отношение $(m_i/e)d\mathbf{V}/dt$ к $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ — порядка $|\omega/\Omega_i|$. Если $|\omega/\Omega_i| \ll 1$ и, к тому же, $\Delta n_e/n_e \ll 1$, то

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla p_i = \eta \mathbf{j} \quad (|\omega/\Omega_i| \ll 1). \quad (5.28)$$

§ 5.3. Упрощенные МГД уравнения

Если $|\omega/\Omega_i| \ll 1$, $|\omega/k| \ll c$, и можно пренебречь ионным давлением ∇p_i в законе Ома, то МГД уравнения выглядят проще:

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}, \quad (5.29)$$

$$\rho_m \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (5.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (5.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (5.32)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho_m + \rho_m \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (5.34)$$

В качестве уравнения состояния можно взять адиабату,

$$\frac{d}{dt} (p \rho_m^{-\gamma}) = 0,$$

где γ — показатель адиабаты, определяемый числом степеней свободы δ , $\gamma = (2 + \delta)/\delta$; в трехмерном случае $\gamma = 5/3$ ($\delta = 3$)¹⁾. В сочетании с (5.34) уравнение адиабаты дает

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (5.35)$$

Более простое условие несжимаемости

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (5.36)$$

¹⁾ Речь идет, разумеется, о числе степеней свободы молекулы жидкости или газа, а не всего газа. — *Примеч. ред.*

применяется в случае $|(d\rho/dt)/\rho| \ll |\nabla \cdot \mathbf{V}|$. Из уравнений (5.31), (5.32) следует закон сохранения энергии в виде

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (5.37)$$

С помощью (5.29) третий член в левой части (5.37) можно записать так:

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \eta j^2 + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V}. \quad (5.38)$$

С использованием (5.30), (5.34) лоренцевский член в (5.38) выражается как

$$(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_m V^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_m V^2}{2} \mathbf{V} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla p.$$

Из (5.35) следует, что

$$-\nabla \cdot (p\mathbf{V}) = \frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1)p\nabla \cdot \mathbf{V}$$

и

$$\mathbf{V} \cdot \nabla p = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\gamma - 1} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{V}.$$

Поэтому сохранение энергии (5.37) сводится к

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_m V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \eta j^2 + \\ + \nabla \cdot \left(\frac{\rho_m V^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + p \right) \mathbf{V} = 0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Подстановка (5.29) в (5.32) дает

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \eta \nabla \times \mathbf{j} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}, \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}. \quad (5.41)$$

Мы использовали здесь векторную формулу из Приложения для $\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ и соотношение $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\Delta \mathbf{B}$ (которое справедливо лишь при записи лапласиана в ортогональных координатах). Величину $\eta/\mu_0 = \nu_m$ называют *магнитной вязкостью*. Подстановка (5.31) в (5.30) дает

$$\rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad (5.42)$$

Уравнения движения (5.42) и магнитной диффузии (5.41) являются фундаментальными уравнениями магнитной гидродинамики.

ки. Уравнение (5.33) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, уравнение непрерывности (5.34) и уравнение состояния (5.35) или (5.36) служат дополнительными соотношениями.

Отношение R_m первого и второго членов в правой части (5.40), определяемое как

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})|}{|\Delta \mathbf{B}(\eta/\mu_0)|} \sim \frac{VB/L}{(B/L^2)(\eta/\mu_0)} = \frac{\mu_0 VL}{\eta} \equiv R_m, \quad (5.43)$$

называют *магнитным числом Рейнольдса*. Посредством L обозначен характерный размер плазмы. Магнитное число Рейнольдса равно отношению времени диффузии магнитного поля $\tau_R = \mu_0 L^2/\eta$ к альфвеновскому времени $\tau_H = L/v_A$ (предполагается, что $v \approx v_A$), т. е. $R_m = \tau_R/\tau_H$. Если $R_m \ll 1$, магнитное поле в плазме эволюционирует в соответствии с уравнением диффузии. Если $R_m \gg 1$, то можно показать, что силовые линии магнитного поля оказываются замороженными в плазму. Введем магнитный поток $\Delta\Phi$ через элемент поверхности ΔS и выберем ось z вдоль направления вектора \mathbf{B} . Тогда

$$\Delta\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\Delta S = B\Delta x\Delta y.$$

Если граница ΔS движется, то скорость изменения ΔS равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta x) &= \frac{d}{dt}(x + \Delta x - x) = V_x(x + \Delta x) - V_x(x) = \frac{\partial V_x}{\partial x}\Delta x, \\ \frac{d}{dt}(\Delta S) &= \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \Delta x\Delta y. \end{aligned}$$

Скорость изменения потока $\Delta\Phi$ составляет

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta\Phi) &= \frac{dB}{dt}\Delta S + B\frac{d}{dt}(\Delta S) = \\ &= \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{V} \right)_z \Delta S = \frac{\eta}{\mu_0} \Delta B_z(\Delta S). \end{aligned} \quad (5.44)$$

(см. (5.41)). Если $R_m \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$, скорость изменения потока стремится к нулю, т. е. $d(\Delta\Phi)/dt \rightarrow 0$. Это означает замороженность магнитного потока в плазму.

§ 5.4. Магнитозвуковые волны

Как обычно, будем обозначать величины нулевого порядка (равновесные) индексом 0, а возмущения первого порядка — индексом 1, т. е. $\rho_m = \rho_{m0} + \rho_{m1}$, $p = p_0 + p_1$, $\mathbf{V} = \mathbf{0} + \mathbf{V}$,

$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1$ ¹⁾). Ниже будет рассмотрен случай $\eta = 0$. Уравнения первого порядка таковы:

$$\frac{\partial \rho_{m1}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m0} \mathbf{V}) = 0, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla p_1 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0, \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0). \quad (5.48)$$

Если обозначить смещение плазмы от положения равновесия \mathbf{r}_0 через $\xi(\mathbf{r}_0, t)$, то

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{r}_0, t) &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{V} &= \frac{d\xi}{dt} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Подстановка (5.49) в (5.48) дает

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0), \quad (5.50)$$

где

$$\mu_0 \mathbf{j}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1. \quad (5.51)$$

Подстановка (5.49) в (5.45), (5.47) дает

$$\rho_{m1} = -\nabla \cdot (\rho_{m0} \xi), \quad (5.52)$$

$$p_1 = -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi. \quad (5.53)$$

Теперь уравнение (5.46) приводится к виду

$$\begin{aligned} \rho_{m0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \nabla (\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Рассмотрим смещение $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_1 \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ в случае $\mathbf{B}_0 = \text{const}$, $p_0 = \text{const}$. Тогда (5.54) дает

$$-\rho_{m0} \omega^2 \xi_1 = -\gamma p_0 (\mathbf{k} \cdot \xi_1) \mathbf{k} - \mu_0^{-1} (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times (\xi_1 \times \mathbf{B}_0))) \times \mathbf{B}_0. \quad (5.55)$$

¹⁾ Строго говоря, зависящую от времени величину всегда можно представить в виде суммы постоянной и переменной частей, здесь еще нет приближения. Предположение о малости возмущения начинает работать, когда нелинейные по возмущению члены уравнений отбрасываются при так называемой «линеаризации» (см. ниже). — *Примеч. ред.*

Используя векторную формулу $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, уравнение (5.55) можно записать как

$$((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 - \mu_0 \omega^2 \rho_{m0}) \xi_1 + ((B_0^2 + \mu_0 \gamma p_0) \mathbf{k} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_0) (\mathbf{k} \cdot \xi_1) - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) (\mathbf{B}_0 \cdot \xi_1) \mathbf{k} = 0.$$

Вводя единичные векторы $\hat{\mathbf{k}} \equiv \mathbf{k}/k$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}_0/B_0$ вдоль направлений \mathbf{k} , \mathbf{B}_0 и обозначения $V \equiv \omega/k$, $v_A^2 \equiv B_0^2/(\mu_0 \rho_{m0})$, $\beta \equiv p_0/(B_0^2/2\mu_0)$, $\cos \theta \equiv (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{b})$, получаем

$$\left(\cos^2 \theta - \frac{V^2}{v_A^2} \right) \xi_1 + \left(\left(1 + \frac{\gamma \beta}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} - \cos \theta \mathbf{b} \right) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \xi_1) - \cos \theta (\mathbf{b} \cdot \xi_1) \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (5.56)$$

Скалярное произведение (5.56) на $\hat{\mathbf{k}}$ и \mathbf{b} и векторное произведение $\hat{\mathbf{k}}$, а затем скалярное на \mathbf{b} на (5.56) дают

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\gamma \beta}{2} - \frac{V^2}{v_A^2} \right) (\hat{\mathbf{k}} \cdot \xi_1) - \cos \theta (\mathbf{b} \cdot \xi_1) &= 0, \\ \frac{\gamma \beta}{2} \cos \theta (\hat{\mathbf{k}} \cdot \xi_1) - \frac{V^2}{v_A^2} (\mathbf{b} \cdot \xi_1) &= 0, \\ \left(\cos^2 \theta - \frac{V^2}{v_A^2} \right) \mathbf{b} \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \xi_1) &= 0. \end{aligned}$$

Решениями этих уравнений служат магнитозвуковые волны. Одно из этих решений таково:

$$V^2 = v_A^2 \cos^2 \theta, \quad (\xi_1 \cdot \mathbf{k}) = 0, \quad (\xi_1 \cdot \mathbf{B}_0) = 0. \quad (5.57)$$

Поскольку ξ_1 в этом решении ортогонально \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 , оно называется крутильной альфвеновской волной (см. разд. 10.4)¹⁾. Другие решения отвечают соотношениям:

$$\begin{aligned} \left(\frac{V}{v_A} \right)^4 - \left(1 + \frac{\gamma \beta}{2} \right) \left(\frac{V}{v_A} \right)^2 + \frac{\gamma \beta}{2} \cos^2 \theta &= 0, \\ \mathbf{B}_0 \cdot (\mathbf{k} \times \xi_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.58)$$

¹⁾ В отечественной литературе данный термин практически не употребляется, говорят просто «альфвеновская волна». В англоязычной литературе термин «Torsional Alfvén» или «Shear Alfvén» употребляется, чтобы подчеркнуть отличие от описываемой ниже компрессионной альфвеновской волны «Compressional Alfvén», обычно именуемой в отечественной литературе быстрой магнитозвуковой волной. — *Примеч. ред.*

Так как ξ_1 в этих решениях компланарно \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 , они описывают компрессионные моды (волны сжатия—разрежения). Если ввести скорость звука $c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_{m0}$, то уравнение (5.58) превращается в

$$V^4 - (v_A^2 + c_s^2)V^2 + v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta = 0,$$

и его решения суть

$$V_f^2 = \frac{1}{2} \left(v_A^2 + c_s^2 + \left((v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta \right)^{1/2} \right), \quad (5.59)$$

$$V_s^2 = \frac{1}{2} \left(v_A^2 + c_s^2 - \left((v_A^2 + c_s^2)^2 - 4v_A^2 c_s^2 \cos^2 \theta \right)^{1/2} \right). \quad (5.60)$$

Решение (5.59) называется быстрой, а (5.60) — медленной магнитозвуковой волной соответственно (см. разд. 10.4). Характерная скорость

$$v_A = \frac{B}{\sqrt{\mu_0 \rho_{m0}}}$$

называется альфвеновской скоростью. Плазма с нулевым сопротивлением заморожена в магнитное поле, натяжение силовых линий которого равно $B^2/2\mu_0$. Когда плазма плотностью ρ_m «держится» за силовые линии, магнитный звук может рассматриваться как волны, бегущие вдоль струн из силовых линий (см. разд. 10.4).

Глава 6

РАВНОВЕСИЕ

Для поддержания плазмы в горячем состоянии ее необходимо удерживать, не допуская соприкосновений со стенкой вакуумной камеры. Самый многообещающий метод такого удержания горячей плазмы — использование сильного магнитного поля. В таких системах магнитного удержания должны выполняться условия равновесия.

§ 6.1. Баланс давлений

Если плазма пребывает в состоянии покоя, то МГД уравнение движения (5.30) преобразуется в уравнение равновесия¹⁾

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (6.1)$$

к которому нужно добавить стационарные следствия уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (6.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (6.4)$$

Из уравнения равновесия (6.1) следует, что

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.5) означает, что \mathbf{B} и ∇p ортогональны, а поверхности постоянного давления совпадают с магнитными поверхностями. Уравнение (6.6) показывает, что вектор плотности тока \mathbf{j}

¹⁾ Отметим, что область применимости уравнения равновесия в виде (6.1) значительно шире, чем стационарной МГД. Подробное обсуждение этого вопроса см. в обзоре *Захаров Л.Е., Шафранов В.Д.* Вопросы теории плазмы. Вып. 11 / Под ред. *Леонтовича М.А. и Кадомцева Б.Б.* — М.: Энергоиздат, 1982. С. 118. — *Примеч. ред.*

везде параллелен поверхностям постоянного давления. Подставляя (6.2) в (6.1), получим

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{B^2}{\mu_0} \left(-\frac{1}{R} \mathbf{n} + \frac{\partial B / \partial l}{B} \mathbf{b} \right). \quad (6.7)$$

Здесь были использованы следующие векторные соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= \nabla (B^2/2), \\ (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} &= B^2 [(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b}((\mathbf{b} \cdot \nabla) B)/B], \end{aligned}$$

где R обозначает радиус кривизны силовой линии магнитного поля, \mathbf{n} — единичный вектор, направленный в текущую точку на силовой линии из центра кривизны (нормаль), а l — координата, отсчитываемая вдоль силовой линии магнитного поля. Правой частью уравнения (6.7) можно пренебречь, если радиус кривизны R много больше характерного расстояния изменения p , т. е. размера плазмы, и если изменение \mathbf{B} вдоль силовой линии магнитного поля много меньше, чем изменение \mathbf{B} в направлении, перпендикулярном ей. При этом предположении в (6.7)

$$p + B^2 2\mu_0 \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0},$$

где B_0 — значение магнитного поля на границе плазмы (там, где $p = 0$).

Если система осесимметрична и $\partial/\partial z = 0$, то уравнение (6.7) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{r\mu_0}. \quad (6.8)$$

Умножая (6.8) на r^2 и интегрируя по частям, получим

$$\left(p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right)_{r=a} = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) 2\pi r dr,$$

т. е.

$$\langle p \rangle + \frac{\langle B_z^2 \rangle}{2\mu_0} = p_a + \frac{B_z^2(a) + B_\theta^2(a)}{2\mu_0}. \quad (6.9)$$

Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают усреднение по объему. Величина $B^2/2\mu_0$ — это давление магнитного поля, и уравнение (6.9)

есть ни что иное, как уравнение баланса давлений. Отношение давления плазмы к давлению внешнего магнитного поля B_0

$$\beta \equiv \frac{p}{B_0^2/2\mu_0} = \frac{n(T_e + T_i)}{B_0^2/2\mu_0} \quad (6.10)$$

называется параметром *бета*. Для удерживаемой плазмы значение β всегда меньше единицы, так что β служит мерой эффективности использования удерживающего магнитного поля. Тот факт, что внутреннее магнитное поле меньше, чем внешнее, отражает свойство *диамагнетизма* плазмы.

§ 6.2. Уравнения равновесия для систем с осевой и трансляционной симметриями

Будем использовать цилиндрическую систему координат (r, φ, z) и обозначим магнитную поверхность меткой ψ . Магнитную поверхность $\psi = \text{const}$ в осесимметричной системе можно задать через φ -компоненту векторного потенциала (см. (3.24)):

$$\psi = rA_\varphi(r, z), \quad (6.11)$$

где (r, φ, z) — цилиндрические координаты, а r - и z -компоненты магнитного поля даются соотношениями

$$rB_r = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad rB_z = \frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (6.12)$$

Условие $\mathbf{V} \cdot \nabla p = 0$ следует из уравнения равновесия и расписывается как

$$-\frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, p является функцией только ψ , т. е.

$$p = p(\psi). \quad (6.13)$$

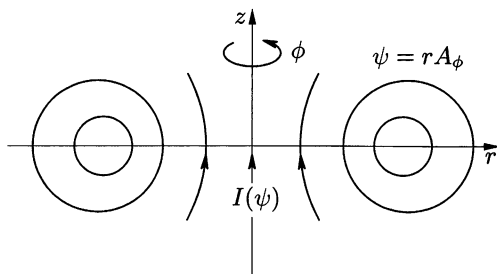
Аналогично, из соотношений $\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0$ и $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, можно получить

$$-\frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r} = 0.$$

Это означает, что rB_φ — функция только ψ , и

$$rB_\varphi = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi}. \quad (6.14)$$

Уравнение (6.14) показывает, что $I(\psi)$ — это ток, текущий в полоидальном направлении через круглое сечение плоскости $z = \text{const}$ поверхностью $\psi = rA_\varphi$ (рис. 6.1). r -компонента выра-

Рис. 6.1. Магнитные поверхности $\psi = rA_\phi$ и $I(\psi)$

жения $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ приводит к уравнению, определяющему ψ :

$$L(\psi) + \mu_0 r^2 \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{\partial I^2(\psi)}{\partial \psi} = 0, \quad (6.15)$$

где

$$L(\psi) \equiv \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi.$$

Это уравнение носит название *уравнение Грэда—Шафранова*. Плотность тока выражается через функции магнитной поверхности

$$j_r = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial I(\psi)}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I(\psi)}{\partial r},$$

$$j_\phi = \frac{-1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = -\frac{L(\psi)}{\mu_0 r} = \frac{1}{\mu_0 r} \left(\mu_0 r^2 p' + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} (I^2)' \right).$$

Итак,

$$\mathbf{j} = \frac{I'}{2\pi} \mathbf{B} + p' r \mathbf{e}_\phi, \quad (6.16)$$

и

$$L(\psi) + \mu_0 r j_\phi = 0.$$

Величины $p(\psi)$ и $I^2(\psi)$ — произвольные функции, зависящие от ψ . Предположим квадратичную зависимость функций p и I^2 от ψ . Значение ψ_s на границе плазмы можно положить равным нулю ($\psi_s = 0$) без потери общности. Если на границе плазмы $p = p_s$, $I^2 = I_s^2$ и на магнитной оси $\psi = \psi_0$, $p = p_0$, $I^2 = I_0^2$, то p и I^2 можно записать в следующей форме:

$$p(\psi) = p_s + (p_0 - p_s) \frac{\psi^2}{\psi_0^2},$$

$$I^2(\psi) = I_s^2 + (I_0^2 - I_s^2) \frac{\psi^2}{\psi_0^2}.$$

Тогда уравнение равновесия (6.15) принимает вид

$$L(\psi) + (\alpha r^2 + \beta)\psi = 0, \\ \alpha = \frac{2\mu_0(p_0 - p_s)}{\psi_0^2}, \quad \beta = \frac{\mu_0^2 (I_0^2 - I_s^2)}{4\pi^2 \psi_0^2}.$$

Поскольку

$$\int_V \frac{\psi}{r^2} (\alpha r^2 + \beta)\psi dV = 2\mu_0 \int_V (p - p_s) dV + \frac{\mu_0^2}{4\pi^2} \int_V \frac{(I^2 - I_s^2)}{r^2} dV, \\ \int_V \frac{1}{r^2} \psi L(\psi) dV = \int_S \frac{1}{r^2} \psi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS - \int_V \frac{1}{r^2} (\nabla \psi)^2 dV = - \int_V (B_r^2 + B_z^2) dV,$$

то уравнение (6.15) сводится к

$$\int (p - p_s) dV = \int \frac{1}{2\mu_0} (B_{\varphi s}^2 - B_{\varphi}^2 + (B_r^2 + B_z^2)) dV.$$

В рамках сделанных предположений о виде функций $p(\psi)$ и $I(\psi)$ это уравнение баланса давлений.

Магнитная поверхность ¹⁾ ψ , магнитное поле \mathbf{B} и давление p в системе с трансляционной симметрией ($\partial/\partial z = 0$) имеют следующий вид:

$$\psi = A_z(r, \theta), \\ B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad B_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} I(\psi), \\ p = p(\psi).$$

Уравнение равновесия в этом случае сводится к

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \mu_0 \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\mu_0^2}{8\pi^2} \frac{\partial I^2(\psi)}{\partial \psi} = 0,$$

или, с учетом

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\pi} I' \mathbf{B} + p' \mathbf{e}_z,$$

к

$$\Delta \psi + \mu_0 j_z = 0.$$

Подобное уравнение равновесия можно выписать и для системы с винтовой симметрией.

¹⁾ Всюду в этом разделе автор формально отождествляет с магнитной поверхностью полоидальный магнитный поток ψ , постоянный на магнитной поверхности. Этот выбор популярен, но, разумеется, не единственен. — *Примеч. ред.*

§ 6.3. Равновесие в токамаке [1]

Для осесимметричных систем уравнение равновесия имеет вид (6.15). Второе и третье слагаемые в левой части этого уравнения обращаются в нуль вне плазмы. Введем тороидальные координаты (b, ω, φ) (рис. 6.2). Формулы перехода в цилиндрические (r, φ, z) координаты имеют вид

$$r = \frac{R_0 \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b - \cos \omega}, \quad z = \frac{R_0 \sin \omega}{\operatorname{ch} b - \cos \omega}.$$

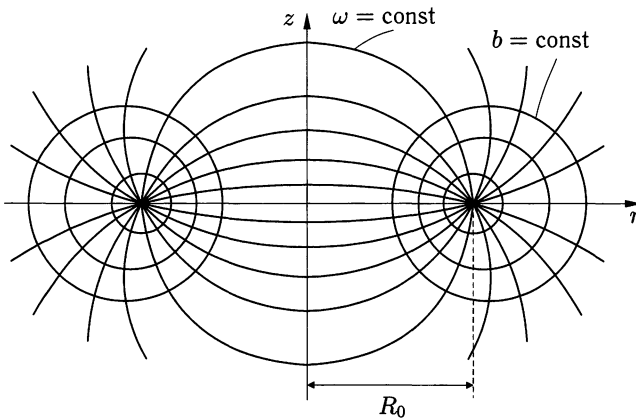


Рис. 6.2. Тороидальные координаты

Кривые $b = b_0$ — окружности с радиусом $a = R_0 \operatorname{sh} b_0$ и центрами $r = R_0 \operatorname{cth} b_0$, $z = 0$. Кривые $\omega = \operatorname{const}$ также являются окружностями. Если функцию магнитной поверхности ψ заменить на F , используя выражение

$$\psi = \frac{F(b, \omega)}{2^{1/2} (\operatorname{ch} b - \cos \omega)^{1/2}},$$

то вне плазмы функция F будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} - \operatorname{cth} b \frac{\partial F}{\partial b} + \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2} + \frac{1}{4} F = 0.$$

Представив F в виде разложения

$$F = \sum g_n(b) \cos n\omega,$$

получим уравнение на коэффициенты g_n :

$$\frac{d^2 g_n}{db^2} - \operatorname{cth} b \frac{dg_n}{db} - \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) g_n = 0.$$

Это уравнение имеет два независимых решения

$$\begin{aligned} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) g_n &= \operatorname{sh} b \frac{d}{db} Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} b), \\ \left(n^2 - \frac{1}{4}\right) f_n &= \operatorname{sh} b \frac{d}{db} P_{n-1/2}(\operatorname{ch} b), \end{aligned}$$

где $P_\nu(x)$ и $Q_\nu(x)$ — функции Лежандра. Если отношение радиуса плазмы к большому радиусу a/R_0 мало, т. е. если $e^{b_0} \gg 1$, то функции g_n и f_n принимают вид ¹⁾

$$g_0 = e^{b/2}, \quad g_1 = -\frac{1}{2}e^{-b/2}, \quad f_0 = \frac{2}{\pi}e^{b/2}(b + \ln 4 - 2), \quad f_1 = \frac{2}{3\pi}e^{3b/2}.$$

Если мы отбросим гармоники выше $\cos \omega$, то F и ψ можно записать как

$$\begin{aligned} F &= c_0 g_0 + d_0 f_0 + 2(c_1 g_1 + d_1 f_1) \cos \omega, \\ \psi &= \frac{F}{2^{1/2}(\operatorname{ch} b - \cos \omega)^{1/2}} \approx e^{-b/2}(1 + e^{-b} \cos \omega)F. \end{aligned}$$

Используем показанные на рис. 6.3 координаты ρ, ω' , которые соотносятся с цилиндрическими и тороидальными следующим образом:

$$r = R_0 + \rho \cos \omega' = \frac{R_0 \operatorname{sh} b}{\operatorname{ch} b - \cos \omega}, \quad z = \rho \sin \omega' = \frac{R_0 \sin \omega}{\operatorname{ch} b - \cos \omega}.$$

Если значение b велико, то

$$\omega' \approx \omega, \quad \frac{\rho}{2R_0} \approx e^{-b}.$$

¹⁾ Для получения приближенных асимптотических выражений удобно использовать нижеследующие представления функций g_n и f_n (иногда называемых функциями Фока):

$$\begin{aligned} g_n(b) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} t)^{1/2} \cos nt \, dt, \\ f_n(b) &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{-b}^b (\operatorname{ch} b - \operatorname{ch} t)^{1/2} \operatorname{ch} nt \, dt. \end{aligned}$$

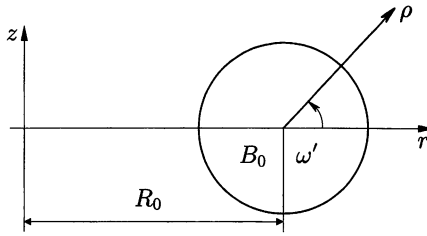


Рис. 6.3. Координаты r, z и ρ, ω'

Соответственно, функция магнитной поверхности ψ определяется выражением

$$\begin{aligned} \psi &= c_0 + \frac{2}{\pi} d_0 (b + \ln 4 - 2) \\ &+ \left[\left(c_0 + \frac{2}{\pi} d_0 (b + \ln 4 - 2) \right) e^{-b} + \left(\frac{4}{3\pi} d_1 e^b - c_1 e^{-b} \right) \right] \cos \omega \\ &= d'_0 \left(\ln \frac{8R_0}{\rho} - 2 \right) + \left(\frac{d'_0}{2R_0} \left(\ln \frac{8R_0}{\rho} - 1 \right) \rho + \frac{h_1}{\rho} + h_2 \rho \right) \cos \omega'. \end{aligned}$$

Компоненты магнитного поля выражаются через функцию магнитной поверхности ψ :

$$\begin{aligned} rB_r &= -\frac{\partial \psi}{\partial z}, & rB_z &= \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ rB_\rho &= -\frac{\partial \psi}{\rho \partial \omega'}, & rB_{\omega'} &= \frac{\partial \psi}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

Из соотношения

$$-\frac{d'_0}{\rho} = r \bar{B}_{\omega'} \approx R_0 \frac{-\mu_0 I_p}{2\pi \rho}$$

можно выразить параметр $d'_0 = \mu_0 I_p R / 2\pi$, где I_p — полный ток, текущий по плазме в направлении φ . Выражение для функции магнитной поверхности принимает следующий вид:

$$\psi = \frac{\mu_0 I_p R}{2\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) + \left(\frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) \rho + \frac{h_1}{\rho} + h_2 \rho \right) \cos \omega', \quad (6.17)$$

где R_0 мы заменили на R . Если $a/R \ll 1$, то уравнение баланса давлений (6.9)

$$\langle p \rangle - p_a = \frac{1}{2\mu_0} \left((B_{\varphi v}^2)_a + (B_r^2 + B_z^2)_a - \langle B_\varphi^2 \rangle \right).$$

Здесь $\langle \dots \rangle$ обозначает усреднение по объему, а p_a — давление плазмы на границе. Величина $B_r^2 + B_z^2$ равна $B_{\omega'}^2$. Отношение $\langle p \rangle$ к $\langle B_{\omega'}^2 \rangle / 2\mu_0$ называется *полоидальным параметром бета* β_p .

Если на границе плазмы давление обращается в нуль ($p_a = 0$), то β_p равно

$$\beta_p = 1 + \frac{B_{\varphi v}^2 - \langle B_{\varphi}^2 \rangle}{B_{\omega'}^2} \approx 1 + \frac{2B_{\varphi v}}{B_{\omega'}^2} \langle B_{\varphi v} - B_{\varphi} \rangle. \quad (6.18)$$

Здесь B_{φ} и $B_{\varphi v}$ — тороидальные магнитные поля в плазме и вакууме соответственно. Плазма является диамагнитной, если значение B_{φ} меньше, чем $B_{\varphi v}$, при этом $\beta_p > 1$. Если же B_{φ} больше, чем $B_{\varphi v}$, то плазма парамагнитна и $\beta_p < 1$ (рис. 6.4). Происхождение парамагнетизма следующее: когда ток плазмы течет вдоль силовых линий магнитного поля, то он порождает как полоидальное магнитное поле $B_{\omega'}$, так и тороидальное ¹⁾.

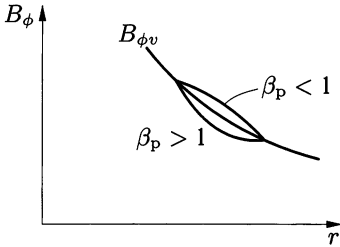


Рис. 6.4. Диамагнетизм ($\beta_p > 1$) и парамагнетизм ($\beta_p < 1$)

С использованием выражения (6.17) магнитное поле можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} B_{\omega'} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \frac{-\mu_0 I_p}{2\pi \rho} + \left(\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R} \ln \frac{8R}{\rho} + \frac{1}{R} \left(h_2 - \frac{h_1}{\rho^2} \right) \right) \cos \omega', \\ B_{\rho} &= -\frac{1}{r \rho} \frac{\partial \psi}{\partial \omega'} = \left(\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) + \frac{1}{R} \left(h_2 + \frac{h_1}{\rho^2} \right) \right) \sin \omega'. \end{aligned} \right\} \quad (6.19)$$

Формула для сечения магнитной поверхности выглядит следующим образом:

$$\psi(\rho, \omega') = \psi_0(\rho) + \psi_1 \cos \omega',$$

где $\Delta = -\psi_1/\psi_0'$ много меньше, чем ρ . Сечения имеют вид окружностей, смещенных на величину (см. рис. 6.5)

$$\Delta(\rho) = \frac{\rho^2}{2R} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) + \frac{2\pi}{\mu_0 I_p R} (h_1 + h_2 \rho^2).$$

Рассмотрим параметры h_1 и h_2 . Как будет показано в разд. 6.4, в равновесном состоянии полоидальная компонента $B_{\omega'}$ магнитного поля на границе плазмы ($r = a$) должна быть равна:

$$B_{\omega'}(a, \omega') = B_a \left(1 + \frac{a}{R} \Lambda \cos \omega' \right). \quad (6.20)$$

¹⁾ Термин парамагнетизм здесь употреблен формально, т. к. речь идет только о полоидальной бета. — *Примеч. ред.*

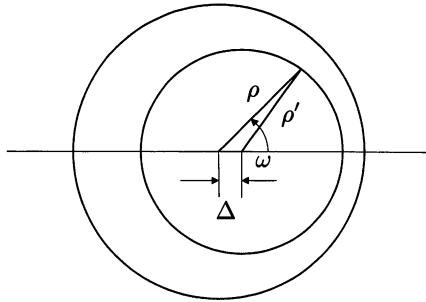


Рис. 6.5. Смещение плазменного шнура. $\psi_0(\rho') = \psi_0(\rho) - \psi'_0(\rho)\Delta \cos \omega$, $\rho' = \rho - \Delta \cos \omega$

Здесь a — радиус плазмы и

$$\Lambda = \beta_p + \frac{l_i}{2} - 1, \quad (6.21)$$

$$\beta_p = \frac{p}{(B_a^2/2\mu_0)}, \quad (6.22)$$

$$l_i = \frac{\int B_{\omega'}^2 \rho \, d\rho \, d\omega'}{\pi a^2 B_a^2}. \quad (6.23)$$

Параметры h_1 и h_2 должны быть выбраны так, чтобы удовлетворять соотношениям $B_\rho = 0$ и $B_{\omega'} = B_a(1 + (a/R)\Lambda \cos \omega')$ на границе плазмы, т. е.

$$h_1 = \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} a^2 \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right), \quad h_2 = -\frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right). \quad (6.24)$$

Подставляя (6.24) в (6.17), получаем

$$\psi = \frac{\mu_0 I_p R}{2\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) - \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\ln \frac{\rho}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \right) \rho \cos \omega'. \quad (6.25)$$

Слагаемое $h_2 \rho \cos \omega'$ в выражении для ψ входит в вертикальное магнитное поле

$$B_z = \frac{h_2}{R}.$$

Это означает, что мы должны приложить внешнее магнитное поле вдоль вертикальной оси.

Введем $\psi_e = h_2 \rho \cos \omega'$ и представим ψ в виде суммы двух членов, $\psi = \psi_p + \psi_e$, где

$$\psi_e = -\frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right) \rho \cos \omega', \quad (6.26)$$

$$\psi_p = \frac{\mu_0 I_p R}{2\pi} \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) + \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\left(\ln \frac{8R}{\rho} - 1 \right) \rho + \frac{a^2}{\rho} \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \right) \cos \omega'. \quad (6.27)$$

Эти формулы показывают: для того чтобы удерживать тороидальную плазму в равновесии (рис. 6.6), должно быть приложено

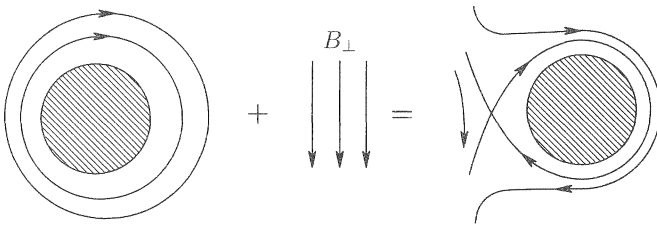


Рис. 6.6. Полоидальное магнитное поле как суперпозиция поля тока плазмы и вертикального магнитного поля

вертикальное однородное магнитное поле

$$B_{\perp} = -\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right). \quad (6.28)$$

Это вертикальное поле ослабляет полоидальное поле на внутреннем обходе шнура и усиливает его на внешнем.

Величина B_{\perp} в (6.28) может быть получена из качественных соображений. Баллонная сила — сила, с которой плазменное кольцо с током стремится растянуться, — определяется выражением

$$F_h = -\frac{\partial}{\partial R} \left. \frac{L_p I_p^2}{2} \right|_{L_p I_p = \text{const}} = \frac{1}{2} I_p^2 \frac{\partial L_p}{\partial R},$$

где L_p — самоиндукция кольца с током

$$L_p = \mu_0 R \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 2 \right).$$

Следовательно, баллонная сила равна

$$F_h = \frac{\mu_0 I_p^2}{2} \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 \right).$$

Сила F_p , направленная наружу, вызывается давлением плазмы (рис. 6.7) и рассчитывается как

$$F_p = \langle p \rangle \pi a^2 2\pi.$$

Сила F_{B1} , направленная внутрь (сжимающая), обусловлена натяжением силовых линий тороидального поля внутри плазмы и равна

$$F_{B1} = -\frac{\langle B_\varphi^2 \rangle}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2,$$

а направленная наружу сила F_{B2} , связанная с давлением внешнего магнитного поля, равна

$$F_{B2} = \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} 2\pi^2 a^2.$$

Наконец, сила F_1 — результат взаимодействия вертикального магнитного поля B_\perp и тока плазмы

$$F_1 = I_p B_\perp 2\pi R.$$

Баланс всех сил дается уравнением

$$\frac{\mu_0 I_p^2}{2} \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 \right) + 2\pi^2 a^2 \left(\langle p \rangle + \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} - \frac{\langle B_\varphi^2 \rangle}{2\mu_0} \right) + 2\pi R I_p B_\perp = 0,$$

откуда получаем значение величины B_\perp ,

$$B_\perp = \frac{-\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \frac{l_i}{2} - 1 + \beta_p - \frac{1}{2} \right).$$

В основе этого вывода лежало соотношение (6.9).

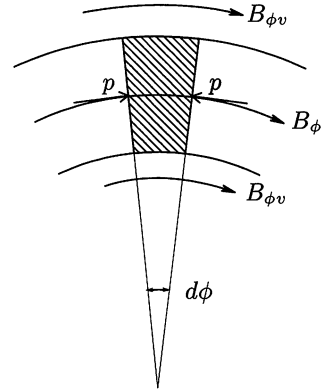


Рис. 6.7. Равновесие сил, действующих на тороидальную плазму

§ 6.4. Полоидальное поле и равновесие плазмы в токамаке

Выпишем тензор давления (магнитного и газокинетического) [2]:

$$T_{\alpha\beta} = \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \delta_{\alpha\beta} - \frac{B_\alpha B_\beta}{\mu_0}.$$

Рассмотрим элементарный объем, ограниченный координатами $(\omega, \omega + d\omega)$, $(\varphi, \varphi + d\varphi)$ и $(0, a)$ (как показано на рис. 6.8). Обозначим единичные векторы в направлениях r, z, φ и ρ, ω

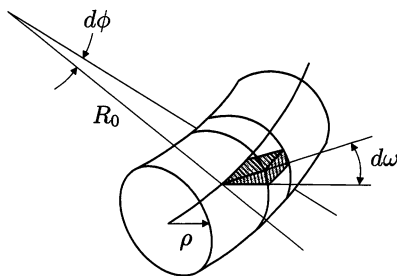


Рис. 6.8. Элемент объема тороидальной плазмы

как $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\varphi$ и $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\omega$ соответственно. Соотношения между ними задаются следующими формулами:

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_r \cos \omega + \mathbf{e}_z \sin \omega, \quad \mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_z \cos \omega - \mathbf{e}_r \sin \omega,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\omega}{\partial \omega} = -\mathbf{e}_\rho, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \omega} = \mathbf{e}_\omega,$$

где ω обозначает то же, что и ω' в разд. 6.3. Обозначим элементарные поверхности, перпендикулярные единичным векторам $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\omega, \mathbf{e}_\varphi$, через dS_ρ, dS_ω и dS_φ соответственно. Результирующая сила \mathbf{F}_φ , действующая на элемент поверхности ($dS_\varphi(\varphi), dS_\varphi(\varphi + d\varphi)$), равна

$$\mathbf{F}_\varphi = -d\omega d\varphi \int_0^a \left(T_{\varphi\varphi} \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} + T_{\varphi\omega} \frac{\partial \mathbf{e}_\omega}{\partial \varphi} + T_{\varphi\rho} \frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \varphi} \right) \rho d\rho =$$

$$= -d\omega d\varphi \int_0^a \left(T_{\varphi\varphi}^0 (\mathbf{e}_\omega \sin \omega - \mathbf{e}_\rho \cos \omega) - T_{\varphi\omega}^0 \mathbf{e}_\varphi \sin \omega \right) \rho d\rho.$$

При определении силы, действующей на элемент поверхности ($dS_\omega(\omega), dS_\omega(\omega + d\omega)$), следует принять во внимание различия значений $\mathbf{e}_\omega, T_{\omega\alpha}$, $dS_\omega = (R + \rho \cos \omega) d\rho d\varphi$ при ω и $\omega + d\omega$. В результате суммарная сила \mathbf{F}_ω будет равна

$$\mathbf{F}_\omega = -d\omega d\varphi \int_0^a \left(T_{\omega\omega} \frac{\partial}{\partial \omega} (\mathbf{e}_\omega (R + \rho \cos \omega)) + \right.$$

$$\left. + T_{\omega\varphi} \frac{\partial}{\partial \omega} (\mathbf{e}_\varphi (R + \rho \cos \omega)) + T_{\omega\rho} \frac{\partial}{\partial \omega} (\mathbf{e}_\rho (R + \rho \cos \omega)) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial T_{\omega\omega}}{\partial \omega} R \mathbf{e}_\omega + \frac{\partial T_{\omega\varphi}}{\partial \omega} R \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial T_{\omega\rho}}{\partial \omega} R \mathbf{e}_\rho \right) d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= d\omega d\varphi \left(R \mathbf{e}_\rho \int_0^a T_{\omega\omega}^0 d\rho \right) + \\
&+ d\omega d\varphi \left[\mathbf{e}_\rho \left(\cos \omega \int T_{\omega\omega}^0 \rho d\rho + R \int T_{\omega\omega}^{(1)} d\rho \right) + \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{e}_\omega \left(\sin \omega \int T_{\omega\omega}^0 \rho d\rho - R \int \frac{\partial T_{\omega\omega}^{(1)}}{\partial \omega} d\rho \right) \right] + \\
&+ d\omega d\varphi \mathbf{e}_\varphi \left(\sin \omega \int T_{\omega\varphi}^0 \rho d\rho - R \int \frac{\partial T_{\omega\varphi}^{(1)}}{\partial \omega} d\rho \right) + \\
&+ d\omega d\varphi \left(-\mathbf{e}_\omega R \int T_{\omega\rho}^{(1)} d\rho - \mathbf{e}_\rho R \int \frac{\partial T_{\omega\rho}^{(1)}}{\partial \omega} d\rho \right) = \\
&= d\omega d\varphi \left(R \mathbf{e}_\rho \int_0^a T_{\omega\omega}^0 d\rho \right) + \\
&+ d\omega d\varphi \mathbf{e}_\rho \left(\cos \omega \int T_{\omega\omega}^0 \rho d\rho + R \int \left(T_{\omega\omega}^{(1)} - \frac{\partial T_{\omega\rho}^{(1)}}{\partial \omega} \right) d\rho \right) + \\
&+ d\omega d\varphi \mathbf{e}_\omega \left(\sin \omega \int T_{\omega\omega}^0 \rho d\rho - R \int \left(T_{\omega\rho}^{(1)} + \frac{\partial T_{\omega\omega}^{(1)}}{\partial \omega} \right) d\rho \right) + \\
&+ d\omega d\varphi \mathbf{e}_\varphi \left(\sin \omega \int T_{\omega\omega}^0 \rho d\rho - R \int \frac{\partial T_{\omega\varphi}^{(1)}}{\partial \omega} d\rho \right).
\end{aligned}$$

Так как $B_\rho(a) = 0$, сила \mathbf{F}_ρ , действующая на $dS_\rho(a)$, равна

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_\rho &= -\mathbf{e}_\rho T_{\rho\rho}(R + a \cos \omega) a d\varphi d\omega = \\
&= \mathbf{e}_\rho (-T_{\rho\rho}^0 R a - (T_{\rho\rho}^{(1)} R a + T_{\rho\rho}^0 a^2 \cos \omega)).
\end{aligned}$$

Условие равновесия $\mathbf{F}_\varphi + \mathbf{F}_\omega + \mathbf{F}_\rho = 0$ сводится к

$$\int T_{\omega\omega}^0 d\rho = T_{\rho\rho}^0(a) a,$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \int T_{\omega\varphi}^{(1)} d\rho = \frac{2 \sin \omega}{R} \int T_{\omega\varphi}^0 \rho d\rho, \quad (6.29)$$

$$\int \left(T_{\omega\rho}^{(1)} + \frac{\partial T_{\omega\omega}^{(1)}}{\partial \omega} \right) d\rho = \frac{\sin \omega}{R} \int (T_{\omega\omega}^0 - T_{\varphi\varphi}^0) \rho d\rho, \quad (6.30)$$

$$\cos \omega \int (T_{\varphi\varphi}^0 + T_{\omega\omega}^0) \rho d\rho + R \int \left(T_{\omega\omega}^{(1)} - \frac{\partial T_{\omega\rho}^{(1)}}{\partial \omega} \right) d\rho - \\ - T_{\rho\rho}^0 a^2 \cos \omega - T_{\rho\rho}^{(1)} R a = 0. \quad (6.31)$$

Из того, что $T^{(1)} \propto \sin \omega$, $\cos \omega$, следует, что $\partial^2 T^{(1)} / \partial \omega^2 = -T^{(1)}$. Поэтому уравнение (6.30) записывается в виде

$$\int \left(\frac{\partial T_{\omega\rho}^{(1)}}{\partial \omega} - T_{\omega\omega}^{(1)} \right) d\rho = \frac{\cos \omega}{R} \int (T_{\omega\omega}^0 - T_{\varphi\varphi}^0) \rho d\rho.$$

Используя это соотношение, мы можем переписать уравнение (6.31) так:

$$T_{\rho\rho}^{(1)}(a) = \frac{a}{R} \cos \omega \left(-T_{\rho\rho}^0(a) + \frac{2}{a^2} \int_0^a T_{\varphi\varphi}^0 \rho d\rho \right). \quad (6.32)$$

$T_{\rho\rho}$ и $T_{\varphi\varphi}$ даются формулами

$$T_{\rho\rho} = p + \frac{B_\omega^2}{2\mu_0} + \frac{B_\varphi^2}{2\mu_0}, \quad T_{\varphi\varphi} = p + \frac{B_\omega^2}{2\mu_0} - \frac{B_\varphi^2}{2\mu_0}. \quad (6.33)$$

Из (6.14) получаем

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi R} \left(1 - \frac{\rho}{R} \cos \omega + \dots \right) = \\ = B_\varphi(\rho) \left(1 - \frac{\rho}{R} \cos \omega + \dots \right). \quad (6.34)$$

Когда $B_\omega(a)$ переписано в виде $B_\omega(a) = B_a + B_\omega^{(1)}$, уравнения (6.33) и (6.34) дают выражение

$$T_{\rho\rho}^{(1)}(a) = \frac{B_a B_\omega^{(1)}}{\mu_0} - \frac{B_{\varphi v}^2(a)}{2\mu_0} 2 \frac{a}{R} \cos \omega.$$

С другой стороны, уравнения (6.9) и (6.32) дают $T_{\rho\rho}^{(1)}(a)$ в виде

$$T_{\rho\rho}^{(1)}(a) = \frac{a}{R} \cos \omega \left(-p_a - \frac{B_a^2}{2\mu_0} - \frac{B_{\varphi v}^2(a)}{2\mu_0} + \langle p \rangle + \frac{\langle B_\omega^2 \rangle}{2\mu_0} - \frac{\langle B_\varphi^2 \rangle}{2\mu_0} \right) = \\ = \frac{a}{R} \cos \omega \left(\frac{B_a^2}{2\mu_0} l_i + 2(\langle p \rangle - p_a) - \frac{B_a^2}{\mu_0} - \frac{B_{\varphi v}^2(a)}{\mu_0} \right),$$

где l_i — величина, пропорциональная погонной внутренней индуктивности плазмы (сама внутренняя индуктивность плазмы

в расчете на единицу длины L_i равна $\mu_0 l_i / 4\pi$). Соответственно, $B_\omega^{(1)}$ должно равняться

$$B_\omega^{(1)} = \frac{a}{R} B_a \cos \omega \left(\frac{l_i}{2} + \frac{2\mu_0 \langle p \rangle - p_a}{B_a^2} - 1 \right).$$

B_a является ω -компонентой магнитного поля, порождаемой током плазмы I_p , т. е.

$$B_a = -\frac{\mu_0 I_p}{2\pi a}.$$

Используя определение параметра β_p (отношение давления плазмы p к величине магнитного давления, обусловленного B_a), получим $B_\omega^{(1)}$

$$B_\omega^{(1)} = \frac{a}{R} B_a \cos \omega \left(\frac{l_i}{2} + \beta_p - 1 \right). \quad (6.35)$$

§ 6.5. Предел по параметру β

В предыдущем разделе было получено выражение для величины B_ω , необходимой для поддержания равновесия. При выводе этого выражения предполагалось, что $(a/R)\Lambda < 1$, т. е.

$$\left(\beta_p + \frac{l_i}{2} \right) < \frac{R}{a}.$$

Значение вертикального поля B_\perp , необходимого для поддержания равновесия плазмы, дается выражением

$$B_\perp = B_a \frac{a}{2R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right).$$

Направление \mathbf{B}_\perp на внутреннем обводе тора противоположно направлению \mathbf{B}_ω , порождаемого токами плазмы, поэтому снаружи плазмы существует точка, в которой полоидальное поле равно нулю, так что вне области плазмы может возникать сепаратриса. При повышении давления (a , значит, и при увеличении параметра β_p) значение B_\perp , необходимое для удержания, увеличивается, и, как следствие, сепаратриса смещается в область плазмы. Для простоты рассмотрим модель с резкой границей, внутри которой давление постоянно, и ток плазмы I_p ограничен этой границей. Уравнение баланса сил в этом случае имеет вид

$$\frac{B_\omega^2}{2\mu_0} + \frac{B_{\varphi v}^2}{2\mu_0} \approx p + \frac{B_{\varphi i}^2}{2\mu_0}. \quad (6.36)$$

φ -компоненты магнитного поля внутри и снаружи плазмы $B_{\varphi v}$, $B_{\varphi i}$ пропорциональны $1/r$ в соответствии с (6.14). Обозначим значения $B_{\varphi v}$, $B_{\varphi i}$ при $r = R$ через $B_{\varphi v}^0$, $B_{\varphi i}^0$ соответственно. Тогда (6.36) может быть записано в виде

$$B_{\omega}^2 = 2\mu_0 p - ((B_{\varphi v}^0)^2 - (B_{\varphi i}^0)^2) \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

Максимальное значение давления плазмы внутри тора определяется из условия того, что полоидальное поле при каком-то $r = r_{\min}$ обратится в нуль,

$$2\mu_0 p_{\max} \frac{r_{\min}^2}{R^2} = (B_{\varphi v}^0)^2 - (B_{\varphi i}^0)^2. \quad (6.37)$$

Запишем координату r в виде $r = R + a \cos \omega$ и подставим в уравнение (6.37) (заметим, что $(r_{\min} = R - a)$):

$$B_{\omega}^2 = 2\mu_0 p_{\max} \left(1 - \frac{r_{\min}^2}{r^2}\right) = 8\mu_0 p_{\max} \frac{a}{R} \cos^2 \frac{\omega}{2}.$$

Предполагается, что $a/R \ll 1$. Используя соотношение $\oint B_{\omega} a d\omega = \mu_0 I_p$, получим β_p^c — значение верхнего предела величины β_p

$$\beta_p^c = \frac{\pi^2 R}{16 a} \approx 0,5 \frac{R}{a}. \quad (6.38)$$

Таким образом, максимальное значение β_p в простейшей модели равно половине аспектного отношения R/a . Вводя угол вращательного преобразования ι и фактор запаса устойчивости $q_s = 2\pi/\iota$, нетрудно видеть, что

$$\frac{B_{\omega}}{B_{\varphi}} = \frac{a}{R} \left(\frac{\iota}{2\pi}\right) = \frac{a}{Rq_s}.$$

Используя последнее соотношение для связи величин β и β_p

$$\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0} \approx \frac{p}{B_{\omega}^2/2\mu_0} \left(\frac{B_{\omega}}{B_{\varphi}}\right)^2 = \left(\frac{a}{Rq_s}\right)^2 \beta_p, \quad (6.39)$$

получаем выражение для максимального значения β

$$\beta^c = \frac{0,5 a}{q_s^2 R}. \quad (6.40)$$

§ 6.6. Ток Пфирша—Шлютера [3]

Если давление плазмы изотропно, ток \mathbf{j} в плазме дается формулами (6.1) и (6.4):

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{b}}{B} \times \nabla p,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \times \nabla p \right) = -\nabla p \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \right).$$

Тогда для j_\parallel имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_\parallel = -\nabla p \cdot \left(\left(\nabla \frac{1}{B^2} \times \mathbf{B} \right) + \frac{\mu_0 \mathbf{j}}{B^2} \right) = 2\nabla p \cdot \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^3}, \quad (6.41)$$

$$\frac{\partial j_\parallel}{\partial s} = 2\nabla p \cdot \frac{(\nabla B \times \mathbf{b})}{B^2}, \quad (6.42)$$

где s — координата вдоль силовой линии магнитного поля. В нулевом приближении можно записать $B \propto 1/R$, $p = p(r)$, и $\partial/\partial s = (\partial\theta/\partial s)\partial/\partial\theta = (\iota/(2\pi R))\partial/\partial\theta$, где ι — угол вращательного преобразования. При увеличении s на $2\pi R$ угол θ увеличивается на ι . Тогда (6.42) сводится к

$$\frac{\iota}{2\pi R} \frac{\partial j_\parallel}{\partial \theta} = -\frac{\partial p}{\partial r} \frac{2}{RB} \sin \theta,$$

т. е.

$$\frac{\partial j_\parallel}{\partial \theta} = -\frac{4\pi}{\iota B} \frac{\partial p}{\partial r} \sin \theta, \quad j_\parallel = \frac{4\pi}{\iota B} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta. \quad (6.43)$$

Данный ток называется *током Пфирша—Шлютера* (рис. 6.9). Эти формулы имеют большое значение и будут использованы при вычислении коэффициента диффузии плазмы в тороидальной ловушке. Ток Пфирша—Шлютера обусловлен коротким замыка-

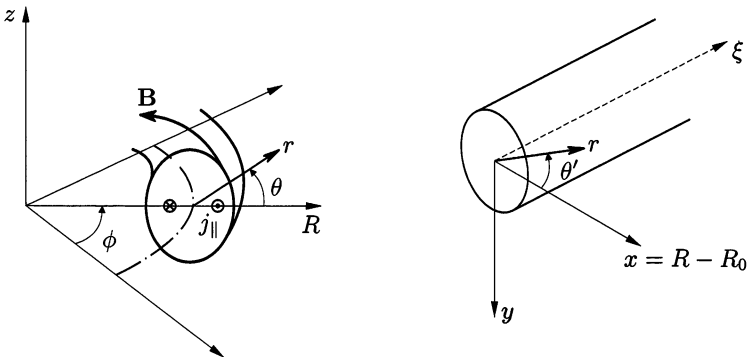


Рис. 6.9. Ток Пфирша—Шлютера j_\parallel в тороидальной плазме

нием вдоль силовых линий магнитного поля поляризационных зарядов, возникающих из-за тороидального дрейфа заряженных частиц. Результирующий ток обратно пропорционален ι .

Пусть радиальные профили давления плазмы $p(r)$ и вращательного преобразования ι соответственно

$$p(r) = p_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^m \right),$$

$$\iota(r) = \iota_0 \left(\frac{r}{a} \right)^{2l-4},$$

тогда j_{\parallel}

$$j_{\parallel} = -\frac{4\pi m p_0}{B \iota_0 a} \left(\frac{r}{a} \right)^{m-2l+3} \cos \theta.$$

Оценим магнитное поле \mathbf{B}^{β} , создаваемое j_{\parallel} . Так как a/R мало, \mathbf{B}^{β} можно оценить, исходя из соответствующей линейной конфигурации, показанной на рис. 6.9. Используем координаты (r, θ', ζ) и положим $\theta = -\theta'$ и $j_{\parallel} \approx j_{\zeta}$ (ι считается небольшим). Тогда векторный потенциал $\mathbf{A}^{\beta} = (0, 0, A_{\zeta}^{\beta})$ для \mathbf{B}^{β} дается выражением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_{\zeta}^{\beta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{\zeta}^{\beta}}{\partial \theta'^2} = -\mu_0 j_{\zeta}.$$

Для $A_{\zeta}^{\beta}(r, \theta') = A^{\beta}(r) \cos \theta'$ и параметров $s = m - 2l + 3$, $\alpha = 4\pi m p_0 \mu_0 / (B \iota_0) = m \beta_0 B / (\iota_0 / 2\pi)$ находим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A^{\beta}}{\partial r} \right) - \frac{A^{\beta}}{r^2} = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{r}{a} \right)^s.$$

В плазменной области ($r < a$) векторный потенциал задается уравнением

$$A_{\text{in}}^{\beta} = \left(\frac{\alpha r^{s+2}}{((s+2)^2 - 1) a^{s+1}} + \delta r \right) \cos \theta',$$

а вне плазмы ($r > a$)

$$A_{\text{out}}^{\beta} = \frac{\gamma}{r} \cos \theta',$$

где δ и γ — константы. Из условия непрерывности B_r^{β} , $B_{\theta'}^{\beta}$ на границе $r = a$ получаем решение для \mathbf{B}^{β} внутри

$$\left. \begin{aligned} B_r^\beta &= -\frac{\alpha}{(s+2)^2-1} \left(\left(\frac{r}{a} \right)^{s+1} - \frac{s+3}{2} \right) \sin \theta', \\ B_{\theta'}^\beta &= -\frac{\alpha}{(s+2)^2-1} \left((s+2) \left(\frac{r}{a} \right)^{s+1} - \frac{s+3}{2} \right) \cos \theta' \end{aligned} \right\} \quad (6.44)$$

и вне плазмы

$$\begin{aligned} B_r^\beta &= \frac{\alpha}{(s+2)^2-1} \frac{s+1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \sin \theta', \\ B_\theta^\beta &= \frac{-\alpha}{(s+2)^2-1} \frac{s+1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 \cos \theta' \end{aligned}$$

($B_r = r^{-1} \partial A_\zeta / \partial \theta'$, $B_{\theta'} = -\partial A_\zeta / \partial r$). Как видно из (6.44), существует однородная вертикальная составляющая поля

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{-(s+3)\alpha}{2((s+2)^2-1)} = \frac{-(m-2l+6)m}{2((m-2l+5)^2-1)} \frac{\beta}{(\iota_0/2\pi)} B = \\ &= -f(m, l) \frac{\beta}{(\iota_0/2\pi)} B. \end{aligned}$$

Эта составляющая вызывает смещение магнитной поверхности на величину Δ . Из уравнения (3.42) получим выражение для Δ :

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{-2\pi B_z}{\iota(\Delta)B} = f(m, l) \frac{(2\pi)^2 \beta}{\iota(\Delta)\iota_0} \approx f(m, l) \frac{\beta}{(\iota_0/2\pi)^2}.$$

$f(m, l)$ — величина порядка единицы, и условие $\Delta < a/2$ дает верхний предел параметра бета

$$\beta_c < \frac{1}{2} \frac{a}{R} \left(\frac{\iota}{2\pi} \right)^2.$$

Это критическое значение оказывается таким же, как в токамаке.

§ 6.7. Теорема вириала

Уравнение равновесия $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla p$ может быть преобразовано к виду

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} T_{ik} - \frac{\partial p}{\partial x_k} = 0, \quad (6.45)$$

где

$$T_{ik} = \frac{1}{\mu_0} (B_i B_k - \frac{1}{2} B^2 \delta_{ik}) \quad (6.46)$$

— тензор магнитного давления. Из соотношения (6.45) получаем

$$\int_S \left(\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{n} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})}{\mu_0} \right) dS = 0, \quad (6.47)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к замкнутой поверхности, ограничивающей объем V .

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k (T_{ik} - p\delta_{ik})) &= \\ &= (T_{kk} - p) + x_k \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (T_{ik} - p\delta_{ik}) = (T_{kk} - p), \end{aligned}$$

то легко получить соотношение, которое называется теоремой вириала:

$$\begin{aligned} \int_V \left(3p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) dV &= \\ &= \int_S \left(\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})}{\mu_0} \right) dS. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Если плазма находится в ограниченной области, причем $p = 0$ снаружи, и, кроме того, ни снаружи, ни внутри нет проводников с током, то на большом расстоянии от плазмы величина магнитного поля будет убывать как $\sim 1/r^3$. Поэтому поверхностный интеграл стремится к нулю, когда поверхность, ограничивающая плазму, стремится к бесконечно большой сфере ($r \rightarrow \infty$). Это противоречит тому, что интеграл по объему (6.48) — конечная положительная величина. Другими словами, плазма, ограниченная конечным объемом, не может находиться в равновесии в отсутствие проводников с током.

Применим теорему вириала (6.48) и (6.47) к элементу объема плазмы с осевой симметрией, ограниченного замкнутой поверхностью тороидальной формы S_t , образованной вращением произвольного контура l_t . Обозначим единичную нормаль и касательную контура l_t через \mathbf{n} и \mathbf{l} соответственно, а элемент поверхности поперечного сечения через dS_φ . Элементы объема и поверхности связаны соотношением

$$dV = 2\pi r dS_\varphi.$$

Магнитное поле \mathbf{B} можно представить как

$$\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{B}_p,$$

где \mathbf{B}_p — полоидальное поле, B_φ — величина тороидального поля, а \mathbf{e}_φ — единичный вектор в направлении φ .

Обратим внимание на два соотношения

$$\int r^\alpha (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dS_t = (\alpha + 3) \int r^\alpha dV, \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \int r^\alpha (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) dS_t &= \int \nabla \cdot (r^\alpha \mathbf{e}_r) dV = \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r^{\alpha+1} dV = \\ &= (\alpha + 1) \int r^{(\alpha-1)} dV = 2\pi(\alpha + 1) \int r^\alpha dS_\varphi, \end{aligned} \quad (6.50)$$

где \mathbf{e}_r — единичный вектор в направлении r . Записывая (6.48) для полного тора, ограниченного S_t , получаем

$$\begin{aligned} \int \left(3p + \frac{B_\varphi^2 + B_p^2}{2\mu_0} \right) dV &= \\ &= \int \left(\left(p + \frac{B_\varphi^2 + B_p^2}{2\mu_0} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \frac{B_n (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})}{\mu_0} \right) dS_t = \\ &= \int \left(\left(p + \frac{B_l^2 - B_n^2}{2\mu_0} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \frac{B_n B_l (\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})}{\mu_0} \right) dS_t + \\ &\quad + \int \frac{B_\varphi^2}{2\mu_0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) dS_t, \end{aligned} \quad (6.51)$$

т. к. $\mathbf{B}_p = B_l \mathbf{l} + B_n \mathbf{n}$ (см. рис. 6.10, а). Обозначим вакуумное тороидальное поле (в отсутствие плазмы) через $B_{\varphi 0}$. Оно равно $B_{\varphi 0} = \mu_0 I / (2\pi r)$, где I — полный ток в обмотках, создающих это поле. С использованием (6.50) соотношение (6.51) сводится [4] к

$$\begin{aligned} \int \left(3p + \frac{B_p^2 + B_\varphi^2 - B_{\varphi 0}^2}{2\mu_0} \right) 2\pi r dS_\varphi &= \\ &= \int \left(\left(p + \frac{B_l^2 - B_n^2}{2\mu_0} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) - \frac{B_n B_l (\mathbf{l} \cdot \mathbf{r})}{\mu_0} \right) dS_t. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Применив уравнение (6.47) к сектору, ограниченному $\varphi = 0$, $\varphi = \Delta\varphi$ и S_t (см. рис. 6.10, б), и взяв его r -составляющую,

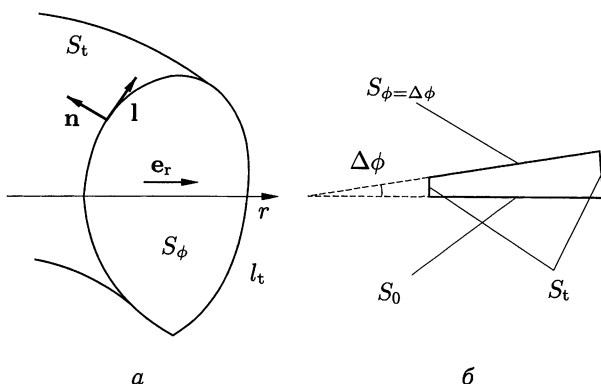


Рис. 6.10. Области интегрирования при выводе теоремы вириала в уравнениях:
 $a - (6.48)$, $b - (6.47)$

получим [4]

$$\begin{aligned}
 & -\Delta\varphi \int \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} - \frac{B_\varphi^2}{\mu_0} \right) dS_\varphi + \\
 & + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \int \left(\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r) - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_r)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})}{\mu_0} \right) dS_t = 0, \\
 & 2\pi \int \left(p + \frac{B_p^2 - B_\varphi^2 + B_{\varphi 0}^2}{2\mu_0} \right) dS_\varphi = \\
 & = \int \left(\left(p + \frac{B_l^2 - B_n^2}{2\mu_0} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r) - \frac{B_l B_n (\mathbf{l} \cdot \mathbf{e}_r)}{\mu_0} \right) dS_t = 0.
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Подставляя в уравнения (6.52) и (6.53) данные магнитных зондов, расположенных вокруг плазмы, можно рассчитать параметр бета для полоидального поля (6.18) и погонную внутреннюю индуктивность (6.23) для случая равновесия осесимметричной тороидальной плазмы с произвольной формой граничной поверхности.

Список литературы

1. Mukhovatov V.S., Shafranov V.D. Nucl. Fusion. 1971. V. 11. P. 605.
2. Shafranov V.D. Plasma Physics, J. of Nucl. Energy pt. 1963. V. C5. P. 251.
3. Pfirsch D., Schlüter A. MPI/PA/7/62 Max-Planck Institut für Physik und Astrophysik, München. 1962.
4. Shafranov V.D. Plasma Physics. 1971. V. 13. P. 757.

Глава 7

ДИФФУЗИЯ ПЛАЗМЫ, ВРЕМЯ УДЕРЖАНИЯ

Диффузия и удержание плазмы относятся к числу наиболее важных тем в изучении термоядерного синтеза, причем теоретические и экспериментальные исследования в этой области дополняют друг друга. Хотя общее обсуждение диффузии и удержания требует рассмотрения различных неустойчивостей (которые будут изучены в последующих главах), важно также рассмотреть простую, но имеющую большое значение диффузию для идеальных, устойчивых случаев. Типичный пример (разд. 7.1) — классическая диффузия, при которой основным эффектом являются столкновения между электронами и ионами. В разд. 7.2 описывается неоклассическая диффузия тороидальной плазмы в токамаке как для случая редких столкновений, так и для случая сильностолкновительной плазмы. Иногда диффузию в неустойчивой плазме можно изучать феноменологически, не обращаясь к деталям неустойчивостей. В разд. 7.3 и 7.4 так объясняется диффузия, вызванная флуктуациями в плазме.

Перенос частиц описывается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot (n(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)) = 0 \quad (7.1)$$

в пренебрежении ионизацией нейтральных атомов и рекомбинацией ионов (см. разд. 5.1). Поток частиц $\Gamma = n\mathbf{V}$ во многих случаях дается выражением

$$n(\mathbf{r}, t) \mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = -D(\mathbf{r}, t) \nabla n(\mathbf{r}, t),$$

где D — коэффициент диффузии, а n — концентрация плазмы. В некоторых случаях в выражении для потока могут возникать и дополнительные члены.

Уравнение диффузии

$$\nabla \cdot (D \nabla n(\mathbf{r}, t)) = \frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, t)$$

связывает коэффициент диффузии D и время удержания частиц τ_p . Действительно, подстановка $n(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}) \exp(-t/\tau_p)$ в уравнение диффузии дает

$$\nabla \cdot (D \nabla n(\mathbf{r})) = -\frac{1}{\tau_p} n(\mathbf{r}).$$

Если D — константа, а плазма имеет форму цилиндра с радиусом a , уравнение диффузии сводится к

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) + \frac{1}{D\tau_p} n = 0.$$

Решением, удовлетворяющим граничному условию $n(a) = 0$, служит

$$n = n_0 J_0 \left(\frac{2,4r}{a} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau_p} \right),$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, а время удержания частиц

$$\tau_p = \frac{a^2}{2,4^2 D} = \frac{a^2}{5,8 D}. \quad (7.2)$$

Соотношение типа (7.2) между временем удержания частиц τ_p , коэффициентом диффузии D и размером плазмы a является общим; в зависимости от геометрии незначительно меняется лишь числовой множитель. Такая формула часто используется для расчета коэффициента диффузии по наблюдаемым значениям радиуса плазмы и времени удержания частиц.

Баланс энергии дается уравнением, которое выводится в Приложении А (см. (А.19)):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n \kappa T \right) + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} \kappa T n \mathbf{V} \right) + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q - p \nabla \cdot \mathbf{V} - \sum_{ij} \Pi_{ij} \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_j}. \quad (7.3)$$

Первый член в правой части — это тепло, выделяющееся в единице объема в единицу времени, обусловленное столкновениями частиц, второй член представляет собой работу, производимую давлением, а третий — нагрев за счет вязкости. Первый член в левой части — это производная по времени от тепловой энергии в единице объема, второй — описывает конвективные потери энергии, а третий — потери из-за теплопроводности. Обозначая коэффициент теплопроводности через κ_T , можно записать поток тепла, связанный с теплопроводностью, следующим образом:

$$\mathbf{q} = -\kappa_T \nabla(\kappa T).$$

Если конвективные потери пренебрежимо малы и тепловыделение в правой части уравнения (7.3) равно нулю, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} n \kappa T \right) - \nabla \cdot \kappa_T \nabla(\kappa T) = 0.$$

В случае $n = \text{const}$ это уравнение сводится к

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} \kappa T \right) = \nabla \cdot \left(\frac{\kappa_T}{n} \nabla(\kappa T) \right).$$

Определив коэффициент температуропроводности как

$$\chi_T = \frac{\kappa_T}{n},$$

получим уравнение для температуры, аналогичное уравнению диффузии для концентрации. При $\chi_T = \text{const}$ решение в цилиндрическом случае имеет вид

$$\kappa_T = \kappa_{T0} J_0 \left(\frac{2,4}{a} r \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau_E} \right), \quad \tau_E = \frac{a^2}{5,8(2/3)\chi_T}. \quad (7.4)$$

Параметр τ_E называется *энергетическим временем удержания*.

§ 7.1. Столкновительная (классическая) диффузия

7.1а. Магнитогидродинамическое описание

Магнитогидродинамическое описание применимо к явлениям диффузии, когда частота электрон-ионных столкновений велика и средняя длина свободного пробега меньше характерной длины силовой линии между внутренним обводом тора, где у линии благоприятная кривизна, и внешним обводом тора, где у линии неблагоприятная кривизна, т. е.

$$\frac{v_{Te}}{v_{ei}} \lesssim \frac{2\pi R}{l},$$

$$v_{ei} \gtrsim \nu_p \equiv \frac{1}{R} \frac{l}{2\pi} v_{Te} = \frac{1}{R} \frac{l}{2\pi} \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2}.$$

Здесь $v_{Te} = (\kappa T_e / m_e)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов, а ν_{ei} — частота электрон-ионных столкновений. Из закона Ома (5.28)

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{1}{en} \nabla p_i = \eta \mathbf{j},$$

где $\eta = m_e \nu_{ei} / e^2 n_e$ (см. разд. 2.8), и скорость движения плазмы поперек магнитных силовых линий выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} n \mathbf{V}_\perp &= \frac{1}{B} \left((n \mathbf{E} - \frac{\kappa T_i}{e} \nabla n) \times \mathbf{b} \right) - \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2} \frac{\nabla p}{B^2} = \\ &= \frac{1}{B} \left((n \mathbf{E} - \frac{\kappa T_i}{e} \nabla n) \times \mathbf{b} \right) - (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \nabla n. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь $\rho_{\Omega e} = v_{Te} / \Omega_e$ — средний ларморовский радиус электронов.

Если первым членом в правой части можно пренебречь, то коэффициент диффузии частиц D запишется в виде

$$D = (\rho\Omega_e)^2 \nu_{ei} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right). \quad (7.6)$$

Классический коэффициент диффузии D_{ei} определяется как

$$D_{ei} \equiv (\rho\Omega_e)^2 \nu_{ei} = \frac{nT_e}{\sigma_{\perp} B^2} = \frac{\beta_e \eta_{\parallel}}{\mu_0}, \quad (7.7)$$

где $\sigma_{\perp} = n_e e^2 / (m_e \nu_{ei})$, $\beta_e = 2\mu_0 n T_e / B^2$, $\eta_{\parallel} = 1/2\sigma_{\perp}$.

Однако первый член в правой части (7.5) не всегда пренебрежимо мал. В тороидальной конфигурации вследствие конечной проводимости разделение зарядов, возникающее из-за тороидального дрейфа, не полностью устраняется растеканием зарядов вдоль линий магнитного поля, поэтому появляется электрическое поле \mathbf{E} (см. рис. 7.1). Член $\mathbf{E} \times \mathbf{b}$ в (7.5) также дает вклад в диффузию. Найдем этот вклад. Из уравнения равновесия следует, что в плазме течет диамагнитный ток

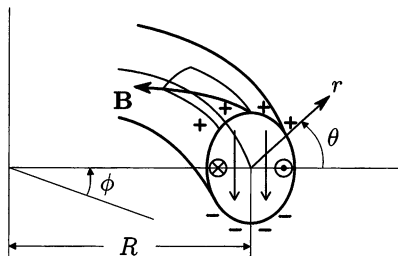


Рис. 7.1. Электрическое поле в плазме, удерживаемой в тороидальном поле. Символы \otimes или \ominus показывают направление тока Пфирша—Шлютера

$$\mathbf{j}_{\perp} = \frac{\mathbf{b}}{B} \times \nabla p, \quad j_{\perp} = \left| \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial r} \right|.$$

Из $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ находим, что $\nabla \cdot \mathbf{j}_{\parallel} = -\nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp}$. Используя выражение $B = B_0(1 - (r/R) \cos \theta)$, величину j_{\parallel} можно записать в виде (см. уравнение (6.43))

$$j_{\parallel} = 2 \frac{2\pi}{\iota} \frac{1}{B_0} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta. \quad (7.8)$$

Если проводимость вдоль магнитных силовых линий равна σ_{\parallel} , то параллельное электрическое поле $E_{\parallel} = j_{\parallel} / \sigma_{\parallel}$. Как видно из рис. 7.1, имеет место соотношение

$$\frac{E_{\theta}}{E_{\parallel}} \approx \frac{B_0}{B_{\theta}}.$$

Учитывая, что $B_{\theta}/B_0 \approx (r/R)(\iota/2\pi)$, получаем θ -компоненту электрического поля:

$$E_{\theta} = \frac{B_0}{B_{\theta}} E_{\parallel} = \frac{R}{r} \frac{2\pi}{\iota} \frac{1}{\sigma_{\parallel}} j_{\parallel} = \frac{2}{\sigma_{\parallel}} \frac{R}{r} \left(\frac{2\pi}{\iota}\right)^2 \frac{1}{B_0} \frac{\partial p}{\partial r} \cos \theta. \quad (7.9)$$

Соответственно, соотношение (7.5) сводится к

$$\begin{aligned} nV_r &= -n \frac{E_\theta}{B} - (\rho\Omega_e)^2 \nu_{ei} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\partial n}{\partial r} = \\ &= - \left(\frac{R}{r} \cdot 2 \left(\frac{2\pi}{\iota}\right)^2 \frac{n\kappa T_e}{\sigma_{\parallel} B_0^2} \cos \theta \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n\kappa T_e}{\sigma_{\perp} B_0^2} \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta\right)^2\right) \cdot \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \frac{\partial n}{\partial r}. \end{aligned}$$

Замечая, что площадь элемента поверхности зависит от θ , и усредняя nV_r по θ , находим

$$\begin{aligned} \langle nV_r \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} nV_r \left(1 + \frac{r}{R} \cos \theta\right) d\theta = \\ &= - \frac{n\kappa T_e}{\sigma_{\perp} B_0^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \left(1 + \frac{2\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}} \left(\frac{2\pi}{\iota}\right)^2\right) \frac{\partial n}{\partial r}. \quad (7.10) \end{aligned}$$

Используя связь $\sigma_{\perp} = \sigma_{\parallel}/2$, получаем коэффициент диффузии тороидальной плазмы:

$$D_{P.S.} = \frac{nT_e}{\sigma_{\perp} B_0^2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e}\right) \left(1 + \left(\frac{2\pi}{\iota}\right)^2\right). \quad (7.11)$$

Этот коэффициент диффузии в $(1 + (2\pi/\iota)^2)$ раз больше, чем коэффициент диффузии (7.6). Величина $\left(1 + \left(\frac{2\pi}{\iota}\right)^2\right)$ называется фактором Пфирша—Шлютера [1]. Когда угол вращательного преобразования $\iota/2\pi$ равен 0,3, фактор Пфирша—Шлютера приближенно составляет 10.

7.1b. Приближение отдельных частиц

Классический коэффициент диффузии электронов

$$D_{ei} = (\rho\Omega_e)^2 \nu_{ei}$$

применим тогда, когда при каждом столкновении электрон перемещается в случайном направлении на расстояние порядка ларморовского радиуса. Рассмотрим тороидальную плазму. Если угол вращательного преобразования равен ι , смещение Δ дрейфовой поверхности электрона от магнитной поверхности составляет (см. рис. 7.2)

$$\Delta \approx \pm \rho\Omega_e \frac{2\pi}{\iota}. \quad (7.12)$$

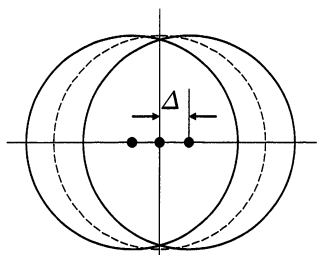


Рис. 7.2. Магнитная поверхность (пунктирная линия) и дрейфовые поверхности (сплошные линии)

Знак \pm зависит от того, является ли направление движения электрона параллельным или антипараллельным магнитному полю (см. разд. 3.5). Так как электрон переходит с одной дрейфовой поверхности на другую лишь при столкновении, то шаг его перемещений поперек магнитного поля есть

$$\Delta = \left(\frac{2\pi}{l}\right) \rho_{\Omega e}. \quad (7.13)$$

Следовательно, коэффициент диффузии дается выражением

$$D_{P.S.} = \Delta^2 \nu_{ei} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei}. \quad (7.14)$$

Из формулы (7.14) получается выражение для фактора Пфирша—Шлютера (предполагается, что $|2\pi/l| \gg 1$).

§ 7.2. Неоклассическая диффузия электронов в токамаке

Величина магнитного поля токамака представима в виде

$$B = \frac{RB_0}{R(1 + \epsilon_t \cos \theta)} = B_0(1 - \epsilon_t \cos \theta), \quad (7.15)$$

где

$$\epsilon_t = \frac{r}{R}. \quad (7.16)$$

Когда перпендикулярная компонента v_{\perp} скорости электрона гораздо больше параллельной компоненты v_{\parallel} , т. е. когда

$$\left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2 > \frac{R}{R+r},$$

или

$$\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} > \frac{1}{\epsilon_t^{1/2}}, \quad (7.17)$$

электрон может оказаться запертым в области внешнего обвода тора, где магнитное поле слабое. Такой электрон дрейфует по траектории, имеющей форму банана (см. рис. 3.9). Чтобы совершить оборот по «банану», эффективное время между столкнове-

ниями $\tau_{\text{eff}} = 1/\nu_{\text{eff}}$ запертого электрона должно быть больше, чем период движения по «банану»

$$\tau_b \approx \frac{R}{v_{\parallel}} \left(\frac{2\pi}{l} \right) = \frac{R}{v_{\perp} \epsilon_t^{1/2}} \left(\frac{2\pi}{l} \right). \quad (7.18)$$

Эффективная частота столкновений ν_{eff} запертого электрона представляет собой частоту, при которой условие (7.17) для запертого электрона нарушается из-за столкновений. Так как частота столкновений ν_{ei} — это обратное время диффузии, необходимое для изменения направления скорости на 1 радиан, эффективная частота столкновений ν_{eff} равна

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{1}{\epsilon_t} \nu_{\text{ei}}. \quad (7.19)$$

Соответственно, если $\nu_{\text{eff}} < 1/\tau_b$, т. е.

$$\nu_{\text{ei}} < \nu_b \equiv \frac{v_{\perp} \epsilon_t^{3/2}}{R} \left(\frac{l}{2\pi} \right) = \epsilon_t^{3/2} \frac{1}{R} \left(\frac{l}{2\pi} \right) \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2}, \quad (7.20)$$

запертый электрон может пройти весь «банан». Когда запертый электрон сталкивается, он может сместиться на толщину «банана» (см. разд. 3.5b)

$$\Delta_b = \frac{mv_{\parallel}}{eB_p} \approx \frac{mv_{\perp}}{eB} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{B}{B_p} \approx \rho_{\Omega e} \epsilon_t^{1/2} \frac{R}{r} \frac{2\pi}{l} = \left(\frac{2\pi}{l} \right) \epsilon_t^{-1/2} \rho_{\Omega e}. \quad (7.21)$$

Так как число запертых электронов составляет $\epsilon_t^{1/2}$ от полного числа электронов, вклад запертых электронов в диффузию

$$\begin{aligned} D_{\text{G.S.}} &= \epsilon_t^{1/2} \Delta_b^2 \nu_{\text{eff}} = \epsilon_t^{1/2} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 \epsilon_t^{-1} (\rho_{\Omega e})^2 \frac{1}{\epsilon_t} \nu_{\text{ei}} = \\ &= \epsilon_t^{-3/2} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{\text{ei}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Этот коэффициент диффузии, введенный Галеевым и Сагдеевым [2], в $\epsilon_t^{-3/2} = (R/r)^{3/2}$ раз больше, чем коэффициент диффузии в столкновительном случае. Данный вывод носит полукачественный характер. Более строгий вывод приведен в работе [2].

Как отмечалось в разд. 7.1, МГД описание применимо, если частота электрон-ионных столкновений больше чем частота ν_p , которая дается выражением

$$\nu_p = \frac{1}{R} \frac{l}{2\pi} v_{\text{Te}} = \frac{1}{R} \left(\frac{l}{2\pi} \right) \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (7.23)$$

Когда частота электрон-ионных столкновений меньше, чем частота

$$\nu_b = \epsilon_t^{3/2} \nu_p, \quad (7.24)$$

электрон может завершить оборот по «банану». Коэффициенты диффузии записываются в следующем виде:

$$D_{P.S.} = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei}, \quad \nu_{ei} > \nu_p, \quad (7.25)$$

$$D_{G.S.} = \epsilon_t^{-3/2} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_{ei}, \quad \nu_{ei} < \nu_b = \epsilon_t^{3/2} \nu_p. \quad (7.26)$$

Если ν_{ei} находится в области $\nu_b < \nu_{ei} < \nu_p$, то описать явления диффузии электронов посредством простой модели невозможно. В этой области нужно прибегнуть к анализу, базирующемуся на уравнении Власова в дрейфовом приближении. В результате оказывается, что коэффициент диффузии не зависит от частоты столкновений и определяется как [2, 3]

$$D_p = \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\rho_{\Omega e})^2 \nu_p, \quad \nu_p > \nu_{ei} > \nu_b = \epsilon_t^{3/2} \nu_p. \quad (7.27)$$

Зависимость коэффициента диффузии от частоты столкновений показана на рис. 7.3. Область $\nu_{ei} > \nu_p$ называется *столкновительной*, или *МГД областью*. Область $\nu_p > \nu_{ei} > \nu_b$ — это *область плато*, или *промежуточная область*, а область $\nu_{ei} < \nu_b$ называется *областью бананов*, или *областью редких столкновений*. Такую диффузию называют неоклассической. По неоклассической диффузии существует превосходный обзор [3].

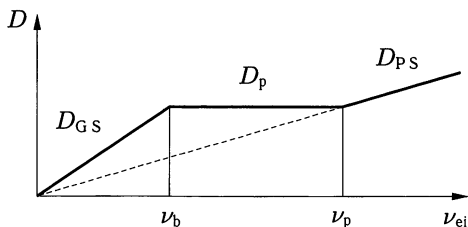


Рис. 7.3. Зависимость коэффициента диффузии от частоты столкновений в токамаке. $\nu_p = (l/2\pi)\nu_{Te}/R$, $\nu_b = \epsilon_t^{3/2}\nu_p$

Частота электрон-электронных столкновений не влияет на коэффициент диффузии электронов, так как скорость центра масс не меняется при кулоновских столкновениях.

Неоклассический коэффициент температуропроводности χ_{Te} имеет тот же порядок величины, что и коэффициент диффузии частиц ($\chi_{Te} \sim D_e$). Хотя столкновения ионов одного ви-

да друг с другом не влияют на коэффициент их диффузии, они дают вклад в процессы теплопроводности, если существует градиент температуры. При этом можно различить горячий (быстрый) и холодный ионы, даже если это ионы одного вида. Коэффициент температуропроводности ионов в области «бананов» дается выражением $\chi_{Ti} \sim \epsilon_t^{-3/2} (2\pi/l)^2 \rho_{\Omega i}^2 \nu_{ii}$, и $\chi_{Ti} \sim (m_i/m_e)^{1/2} D_{ie}$ ($D_{ie} \sim D_{ei}$). Следовательно, коэффициент температуропроводности ионов примерно в $(m_i/m_e)^{1/2}$ раз больше, чем их коэффициент диффузии.

§ 7.3. Потери на флуктуациях, бомовская диффузия и конвективные потери

В предыдущих разделах мы обсудили диффузию, обусловленную парными соударениями, и получили времена удержания при такой диффузии в идеальном случае.

Однако плазма во многих случаях является более или менее неустойчивой, флуктуации плотности и электрического поля приводят к коллективному движению частиц и вызывают аномальные потери. Ниже мы изучим эти потери.

Предположим, что плотность плазмы $n(\mathbf{r}, t)$ состоит из члена нулевого порядка $n_0(\mathbf{r}, t)$ и членов 1-го порядка малости, характеризующих возмущение $\tilde{n}_k(\mathbf{r}, t) = n_k \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)$, то есть

$$n = n_0 + \sum_k \tilde{n}_k.$$

Так как n и n_0 действительны, выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{n}_{-k} = (\tilde{n}_k)^*, \quad n_{-k} = n_k^*, \quad \omega_{-k} = -\omega_k^*,$$

где «*» обозначает комплексное сопряжение. Вообще говоря, ω_k — комплексная величина, $\omega_k = \omega_{k\Gamma} + i\gamma_k$, и

$$\omega_{-k\Gamma} = -\omega_{k\Gamma}, \quad \gamma_{-k} = \gamma_k.$$

Возмущение вызывает движение плазмы. Если скорость выражена как

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \tilde{\mathbf{V}}_k = \sum_k \mathbf{V}_k \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t), \quad (7.29)$$

то $\mathbf{V}_{-k} = \mathbf{V}_k^*$, и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{V}) = 0$$

можно записать в виде

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial \tilde{n}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k n_0 \tilde{\mathbf{V}}_k + \sum_{k,k'} \tilde{n}_k \tilde{\mathbf{V}}_{k'} \right) = 0.$$

Разделяя члены первого и второго порядка малости, получим:

$$\sum_k \frac{\partial \tilde{n}_k}{\partial t} + \nabla \cdot \sum_k n_0 \tilde{\mathbf{V}}_k = 0, \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_{k,k'} \tilde{n}_k \tilde{\mathbf{V}}_{k'} \right) = 0. \quad (7.31)$$

Здесь мы предположили, что производная по времени от n_0 является величиной второго порядка малости. Усредняя по времени произведение уравнения (7.30) и \tilde{n}_{-k} , получим

$$\left. \begin{aligned} \gamma_k |n_k|^2 + \nabla n_0 \cdot \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) + n_0 \mathbf{k} \cdot \operatorname{Im}(n_k \mathbf{V}_{-k}) &= 0, \\ \omega_{kr} |n_k|^2 + \nabla n_0 \cdot \operatorname{Im}(n_k \mathbf{V}_{-k}) - n_0 \mathbf{k} \cdot \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Если усреднить по времени уравнение (7.31), то найдем, что

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\sum_k \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) \exp(2\gamma_k t) \right) = 0. \quad (7.33)$$

Уравнение диффузии имеет вид

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla n_0),$$

а поток частиц наружу

$$\Gamma = -D \nabla n_0 = \sum_k \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) \exp 2\gamma_k t. \quad (7.34)$$

Одних уравнений (7.32) недостаточно, чтобы определить величину $\nabla n_0 \cdot \operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}) \exp 2\gamma_k t$. Обозначим $\beta_k = n_0 \mathbf{k} \times \operatorname{Im}(n_k \mathbf{V}_{-k}) / \nabla n_0 \cdot (\operatorname{Re}(n_k \mathbf{V}_{-k}))$; тогда уравнение (7.34) сводится к

$$D |\nabla n_0|^2 = \frac{\sum_k \gamma_k |n_k|^2 \exp 2\gamma_k t}{1 + \beta_k},$$

где

$$D = \sum_k \gamma_k \frac{|\tilde{n}_k|^2}{|\nabla n_0|^2} \frac{1}{1 + \beta_k}. \quad (7.35)$$

Это коэффициент аномальной диффузии, обусловленный флуктуационными потерями.

Рассмотрим случай, когда электрическое поле флуктуаций $\tilde{\mathbf{E}}_k$ чисто электростатическое, и, следовательно, может быть выражено через потенциал $\tilde{\phi}_k$:

$$\tilde{\mathbf{E}}_k = -\nabla\tilde{\phi}_k = -i\mathbf{k} \cdot \phi_k \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t).$$

Электрическое поле приводит к дрейфу $\tilde{\mathbf{E}}_k \times \mathbf{V}$, т. е.

$$\tilde{\mathbf{V}}_k = (\tilde{\mathbf{E}}_k \times \mathbf{V})/B^2 = -i(\mathbf{k} \times \mathbf{b})\tilde{\phi}_k/B, \quad (7.36)$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{V}/B$. Выражение (7.36) дает перпендикулярную компоненту флуктуационного движения. Подставляя (7.36) в (7.30), получаем

$$\tilde{n}_k = \nabla n_0 \cdot \left(\frac{\mathbf{b} \times \mathbf{k}}{B} \right) \frac{\tilde{\phi}_k}{\omega_k}. \quad (7.37)$$

В общем случае ∇n_0 и \mathbf{b} ортогональны. Возьмем ось z в направлении \mathbf{b} , а ось x в направлении $-\nabla n$, т. е. пусть $\nabla n = -\kappa_n n_0 \hat{\mathbf{x}}$, где κ_n — обратная длина изменения плотности, а $\hat{\mathbf{x}}$ — единичный вектор в направлении оси x . Тогда соотношение (7.37) дает

$$\frac{\tilde{n}_k}{n_0} = \frac{\kappa_n k_y}{B \omega_k} \tilde{\phi}_k = k_y \kappa_n \frac{\kappa T_e}{e B \omega_k} \frac{e \tilde{\phi}_k}{\kappa T_e} = \frac{\omega_k^* e \tilde{\phi}_k}{\omega_k \kappa T_e},$$

где k_y — y -компонента (полоидальная) волнового вектора \mathbf{k} . Величина

$$\omega_k^* \equiv k_y \kappa_n \frac{(\kappa T_e)}{e B}$$

называется *дрейфовой частотой*. Если частота ω_k действительна (т. е. если $\gamma_k = 0$), то \tilde{n}_k и $\tilde{\phi}_k$ имеют одинаковые фазы, и флуктуация не создает вклада в аномальную диффузию, как следует из (7.35). Когда $\gamma_k > 0$ (ω — комплексна), фазы \tilde{n}_k и $\tilde{\phi}_k$ различаются. В этом случае флуктуация электрического поля дает вклад в аномальную диффузию. Когда $\gamma_k < 0$, амплитуда флуктуации затухает и не оказывает влияния на диффузию. Используя действительные параметры $A_k > 0$ и α_k экспоненциального представления частоты $\omega_k = \omega_{kr} + i\gamma_k = \omega_k^* A_k \exp i\alpha_k$, запишем \mathbf{V}_k как

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{V}}_k &= -i(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \frac{\kappa T_e}{e B} \frac{\tilde{\phi}_k}{\kappa T_e} = -i(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \frac{\kappa T_e}{e B} \frac{\tilde{n}_k \omega_{kr} + i\gamma_k}{\omega_k^*} = \\ &= -i(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) \frac{\kappa T_e}{e B} \frac{\tilde{n}_k}{n_0} A_k \exp i\alpha_k, \end{aligned}$$

откуда

$$\tilde{V}_{kx} = k_y \frac{\kappa T_e}{eB} \frac{\tilde{n}_k}{n_0} \frac{\gamma_k - \omega_{kr} i}{\omega_k^*} = k_y \frac{\kappa T_e}{eB} \frac{\tilde{n}_k}{n_0} (-i A_k \exp i \alpha_k).$$

Тогда из (7.34) можно получить коэффициент диффузии в следующем виде:

$$D = \frac{1}{\kappa_n n_0} \operatorname{Re}(\tilde{n}_k \tilde{V}_{-kx}) = \left(\sum_k \frac{k_y}{\kappa_n} A_k \sin \alpha_k \left| \frac{\tilde{n}_k}{n_0} \right|^2 \right) \frac{\kappa T_e}{eB}. \quad (7.38)$$

Коэффициент аномальной диффузии, обусловленный флуктуационными потерями, возрастает со временем (как следует из (7.35) и (7.38)), и в конечном счете начинает преобладать член с максимальным темпом роста $\gamma_k > 0$. Однако амплитуда $|\tilde{n}_k|$ из-за нелинейных эффектов будет стремиться к предельному значению, которое по порядку величины составляет

$$|\tilde{n}_k| \approx |\nabla n_0| \Delta x \approx \frac{\kappa_n}{k_x} n_0.$$

Здесь $\Delta x = 1/k_x$ — корреляционная длина флуктуаций. При этом (7.35) дает

$$D = \frac{\gamma_k}{\kappa_n^2} \left| \frac{\tilde{n}_k}{n_0} \right|^2 \approx \frac{\gamma_k}{k_x^2}. \quad (7.39)$$

Когда безразмерный коэффициент в скобках в уравнении (7.38) равен своему максимальному значению 1/16, мы получаем коэффициент *бомовской диффузии*

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{\kappa T_e}{eB}. \quad (7.40)$$

Выражение (7.40) дает наибольший возможный коэффициент диффузии.

Если измерены флуктуации плотности и потенциала \tilde{n}_k , $\tilde{\phi}_k$, можно вычислить \mathbf{V}_k и сравнить расчетные значения потока частиц Γ и коэффициента диффузии D с их значениями, полученными экспериментально. Так как связь между \tilde{n}_k и $\tilde{\phi}_k$ задана соотношением (7.37), можно найти разницу их фаз, которая покажет, является ли ω_k действительной величиной (колебательная мода) или $\gamma_k > 0$ (растущая мода). Таким образом, формула (7.37) играет важную роль в интерпретации экспериментальных результатов.

Рассмотрим *стационарные конвективные потери* поперек магнитного потока. Даже если для определенного состояния плазмы флуктуации плотности и электрического поля не

наблюдаются, плазма может двигаться поперек магнитного поля и непрерывно вытекать. Когда существует стационарное электрическое поле, и эквипотенциальные поверхности $\phi = \text{const}$ не совпадают с магнитными поверхностями $\psi = \text{const}$, возникает дрейф $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$, перпендикулярный электрическому полю \mathbf{E} , которое, в свою очередь, перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям. Следовательно, плазма дрейфует вдоль эквипотенциальных поверхностей (см. рис. 7.4), которые пересекают магнитные поверхности. Результирующие потери называют стационарными конвективными потерями. Поток частиц есть

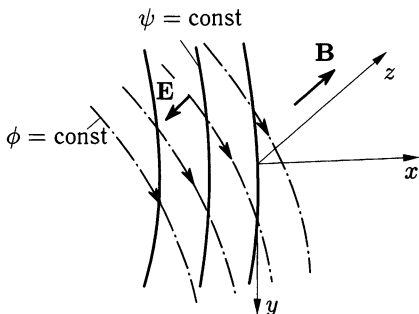


Рис. 7.4. Магнитные поверхности ($\psi = \text{const}$) и эквипотенциальные поверхности электрического поля ($\phi = \text{const}$). Плазма движется вдоль эквипотенциальных поверхностей в результате дрейфа $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$

$$\Gamma_k = n_0 \frac{E_y}{B}. \quad (7.41)$$

Потери, обусловленные диффузией при парных соударениях, пропорциональны B^{-2} , а флуктуационные или конвективные потери пропорциональны B^{-1} . С ростом магнитного поля потери, обусловленные флуктуациями, уменьшаются медленно.

§ 7.4. Потери на флуктуациях магнитного поля

Если магнитное поле в плазме флуктуирует, его силовые линии блуждают в радиальном направлении. Обозначим радиальное смещение линий поля через Δr , а радиальную компоненту магнитной флуктуации $\delta \mathbf{B}$ соответственно через δB_r . Тогда находим

$$\Delta r = \int_0^L b_r dl,$$

где $b_r = \delta B_r / B$ и l — длина вдоль магнитной силовой линии. Усредняя $(\Delta r)^2$ по ансамблю, получим

$$\begin{aligned} \langle (\Delta r)^2 \rangle &= \left\langle \int_0^L b_r dl \int_0^L b_r dl' \right\rangle = \left\langle \int_0^L dl \int_0^L dl' b_r(l) b_r(l') \right\rangle = \\ &= \left\langle \int_0^L dl \int_{-l}^{L-l} ds b_r(l) b_r(l+s) \right\rangle \approx L \langle b_r^2 \rangle l_{\text{согг}}, \end{aligned}$$

где

$$l_{\text{согг}} = \frac{\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} b_r(l) b_r(l+s) ds \right\rangle}{\langle b_r^2 \rangle}.$$

Если электроны движутся вдоль магнитных силовых линий со скоростью v_{Te} , коэффициент диффузии D_e электронов определяется выражением [4]

$$D_e = \frac{\langle (\Delta r)^2 \rangle}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t} \langle b_r^2 \rangle l_{\text{согг}} = v_{Te} l_{\text{согг}} \left\langle \left(\frac{\delta B_r}{B} \right)^2 \right\rangle.$$

В случае токамака можно положить $l_{\text{согг}} \sim R$, а в случае пинча с обращенным полем (RFP, см. разд. 16.1) — $l_{\text{согг}} \sim a$.

Список литературы

1. *Pfirsch D., Schlüter A.* MPI/PA/7/62, Max-Planck Institute für Physik und Astrophysik, München. 1962.
2. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* ЖЭТФ. 1967. V. 53. P. 348.
3. *Kadomtseø B. B., Pogutse O. P.* Nucl. Fusion. 1971. V. 11. P. 67.
4. *Rechester A. B., Rosenbluth M. N.* Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. P. 38.

Глава 8

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Обеспечение устойчивости плазмы в магнитном поле является одной из ключевых задач управляемого термоядерного синтеза, что стимулирует ее активное теоретическое и экспериментальное исследование. Если плазма свободна от всех возможных неустойчивостей, а удержание определяется неоклассической диффузией в банановом режиме, то время удержания энергии τ_E дается выражением

$$\tau_E \approx \frac{(3/2)a^2}{5,8\chi_{G.S.}} \approx \frac{(3/2)}{5,8} \left(\frac{\iota}{2\pi}\right)^2 \epsilon^{3/2} \left(\frac{a}{\rho_{\Omega i}}\right)^2 \frac{1}{\nu_{ii}},$$

где a — радиус плазмы, $\rho_{\Omega i}$ — ларморовский радиус иона, а ν_{ii} — частота ион-ионных столкновений. В этом идеальном случае условию зажигания удовлетворяет реактор вполне приемлемого размера. Например, при $B = 5$ Т, $a = 1$ м, $T_i = 20$ кэВ, $\iota/2\pi \approx 1/3$ и обратном аспектном отношении $\epsilon = 0,2$ величина $n\tau_E \sim 3,5 \cdot 10^{20}$ см⁻³ · с.

Плазма состоит из большого числа движущихся заряженных частиц и обладает множеством магнитогидродинамических степеней свободы, равно как и множеством степеней свободы в пространстве скоростей. Нарастание какой-либо определенной моды возмущений вызывает усиление диффузии. Нагрев плазмы увеличивает кинетическую энергию заряженных частиц, но в то же самое время может возбуждать флуктуации электрического и магнитного полей, которые, в свою очередь, приводят к аномальной диффузии.

Таким образом, очень важно знать, является ли некая определенная мода устойчивой (затухающей) или неустойчивой (нарастающей). При анализе устойчивости отклонение от положения равновесия полагается малым, так что можно воспользоваться линейным приближением¹⁾. В этой главе будут рассмотрены неустойчивости, описываемые линеаризованными магнитогидродинамическими уравнениями. Эти неустойчивости называются *магнитогидродинамическими (МГД) неустойчи-*

¹⁾ Это утверждение нестрого, т. к. разбаланс сил может нелинейно зависеть от отклонения системы от положения равновесия, вообще говоря, и при сколь угодно малой величине этого отклонения. Но в присутствии линейной неустойчивости всегда существуют временной и пространственный интервалы, на которых линеаризация адекватна. — *Примеч. ред.*

востями или макроскопическими неустойчивостями. Малое возмущение $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ первого порядка представляется через Фурье-компоненты

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \sim \mathbf{F}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \quad \omega = \omega_r + i\omega_i,$$

и в линейном приближении каждая мода может рассматриваться независимо. Решаем дисперсионное уравнение относительно ω . Устойчивость возмущения зависит от знака мнимой части ω_i (неустойчиво при $\omega_i > 0$ и устойчиво при $\omega_i < 0$). Когда $\omega_r \neq 0$, возмущение является осцилляторным, а при $\omega_r = 0$ оно монотонно нарастает или затухает.

В следующих разделах рассматриваются типичные МГД неустойчивости. В разд. 8.1 перестановочная и винтовая (кинк) неустойчивости описываются качественно. В разд. 8.2 проводится линеаризация магнитогидродинамических уравнений, обсуждаются граничные условия. Критерий устойчивости выводится из энергетического принципа (8.45)–(8.48). В разд. 8.3 в качестве важного примера рассматривается цилиндрическая плазма; выводятся соответствующие интегралы энергии. Далее описываются важные частные условия устойчивости: предел Крускала–Шафранова (8.66), критерий Сайдема (8.97). Здесь же рассматривается устойчивость токамака и конфигурации типа пинчей с обращенным полем в цилиндрическом приближении. В этой главе рассмотрены лишь наиболее общие и легко трактуемые магнитогидродинамические неустойчивости, но следует иметь в виду, что кроме них есть и много других. Общий обзор неустойчивостей можно найти в работе [1].

§ 8.1. Перестановочная, сосисочная и винтовая неустойчивости

Перед тем, как обсудить общую линейную теорию неустойчивостей, рассмотрим простые примеры неустойчивостей на интуитивном уровне.

8.1а. Перестановочная неустойчивость

Пусть $x = 0$ есть граница между плазмой и вакуумом, и пусть ось z направлена вдоль магнитного поля \mathbf{B} . Плазма находится в области $x < 0$, а вакуум — при $x > 0$. Предполагается, что вдоль направления x (см. рис. 8.1) приложена эффективная сила тяжести, отвечающая ускорению \mathbf{g} . Из-за этой силы ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях со скоростями

$$\begin{aligned} v_{G,i} &= \frac{M \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{e B^2}, \\ v_{G,e} &= -\frac{m \mathbf{g} \times \mathbf{B}}{e B^2}. \end{aligned}$$

Предположим, что из-за возмущения граница плазмы смещается от поверхности $x = 0$ на величину

$$\delta x = a(t) \sin(k_y y).$$

Разделение зарядов вследствие противонаправленных дрейфов ионов и электронов приводит к появлению электрического поля. Результирующий дрейф $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ усиливает начальное возмущение, если ускорение \mathbf{g} направлено из плазмы наружу. Из рис. 8.4, б видно, что вблизи от границы плазмы магнитный поток внутри меняется местами с потоком снаружи плазмы, т. е. в принятой на рисунке геометрии наружный поток движется влево и заполняет возникшую область понижения потока внутри плазмы; неустойчивость такого типа называется *перестановочной неустойчивостью*. Поскольку возмущения границы плазмы при этом выглядят как желобки, вытянутые вдоль магнитных силовых линий (рис. 8.4, б), эта неустойчивость называется еще *желобковой неустойчивостью*. Дрейф вследствие ускорения приводит к появлению на границе плазмы поверхностного заряда с плотностью

$$\sigma_s = \sigma(t) \cos(k_y y) \delta(x) \quad (8.1)$$

(см. рис. 8.1). Электростатический потенциал ϕ наведенного электрического поля $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ определяется уравнением

$$\epsilon_{\perp} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = -\sigma_s \quad (8.2)$$

с граничными условиями

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{+0} - \left(\epsilon_{\perp} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{-0} = -\sigma_s, \\ \phi_{+0} = \phi_{-0}.$$

В предположении $k_y > 0$ решением служит

$$\phi = \frac{\sigma(t)}{k_y (\epsilon_0 + \epsilon_{\perp})} \cos(k_y y) \exp(-k_y |x|). \quad (8.3)$$

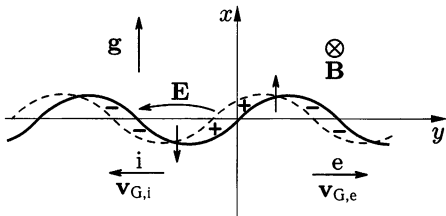


Рис. 8.1. Дрейфы ионов и электронов и результирующее электрическое поле в перестановочной неустойчивости

Скорость смещения границы $d(\delta x)/dt$ равна $\mathbf{E} \times \mathbf{V}/B^2$ при $x = 0$, где \mathbf{E} находится из потенциала (8.3). Эта скорость составляет

$$\frac{da(t)}{dt} \sin(k_y y) = \frac{\sigma(t)}{(\epsilon_0 + \epsilon_{\perp})B} \sin(k_y y). \quad (8.4)$$

Поток заряда в y -направлении есть

$$ne|\mathbf{v}_{G,i}| = \frac{\rho_m g}{B},$$

где $\rho_m = nM$. Соответственно скорость изменения плотности заряда равна

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} \cos(k_y y) = \frac{\rho_m g}{B} a(t) \frac{d}{dy} \sin(k_y y), \quad (8.5)$$

так что

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{\rho_m g k_y}{(\epsilon_0 + \epsilon_{\perp})B^2} a. \quad (8.6)$$

Решение ищем в виде $a \propto \exp \gamma t$, тогда инкремент γ будет

$$\gamma = \left(\frac{\rho_m}{(\epsilon_0 + \epsilon_{\perp})B^2} \right)^{1/2} (g k_y)^{1/2}. \quad (8.7)$$

Диэлектрическая проницаемость в случае низких частот (по сравнению с ионной циклотронной частотой) дается выражением

$$\epsilon_{\perp} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\rho_m}{B^2 \epsilon_0} \right) \gg \epsilon_0, \quad (8.8)$$

как это будет объяснено в гл. 10. Соответственно, для инкремента γ имеем [2]

$$\gamma = (g k_y)^{1/2}. \quad (8.9)$$

Если ускорение направлено наружу, возмущение с волновым вектором \mathbf{k} , направленным поперек магнитного поля \mathbf{B} , т. е.

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0, \quad (8.10)$$

неустойчиво. Если же ускорение направлено внутрь ($g < 0$), то γ в (8.9) является мнимой величиной, и возмущение осциллирует и устойчиво.

Перестановочная неустойчивость возникает вследствие разделения зарядов под действием силы (ускорения). В кривом магнитном поле, показанном на рис. 8.2, на заряженные частицы действует центробежная сила. Если магнитные силовые линии выгнуты наружу (рис. 8.2, *a*), то центробежное ускорение приводит к перестановочной неустойчивости. Если же они вогнуты, то плазма устойчива. Соответственно, плазма устойчива, когда

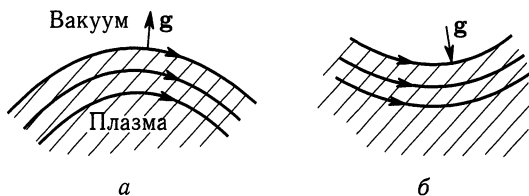


Рис. 8.2. Центробежная сила вследствие кривизны магнитных силовых линий

модуль магнитного поля B возрастает наружу. Другими словами, если B минимально в плазме, то такая плазма устойчива. Это условие устойчивости называется условием *минимума B* .

Скорость дрейфа заряженных частиц равна

$$\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B} + \frac{\mathbf{b}}{\Omega} \times \left(\mathbf{g} + \frac{(v_{\perp}^2/2) + v_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n} \right) + v_{\parallel} \mathbf{b},$$

где \mathbf{n} — единичный нормальный вектор, направленный из центра кривизны в данную точку на магнитной силовой линии, R — радиус ее кривизны. Вызывающее дрейф ускорение равно

$$\mathbf{g} = \frac{(v_{\perp}^2/2) + v_{\parallel}^2}{R} \mathbf{n}. \tag{8.11}$$

В этом случае инкремент неустойчивости: $\gamma \approx (a/R)^{1/2}(v_T/a)$. Анализ перестановочной неустойчивости на основе линеаризованного МГД уравнения движения (8.32) с ускорительным членом описан в работе [1].

Для возмущений с волновым вектором \mathbf{k} поперек магнитного поля \mathbf{B} , то есть при $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0$, причиной неустойчивости того же типа может быть другой механизм разделения зарядов. Когда плазма вращается со скоростью $v_{\theta} = E_r/B$ вследствие направленного внутрь радиального электрического поля (рис. 8.3) и скорость вращения ионов меньше скорости вращения электронов, то возмущение неустойчиво. Есть несколько возможных механизмов замедления вращения ионов. Столкновения ионов с нейтральными частицами вызывают замедление ионов и приводят к раскатушке *неустойчивости трения о нейтралы (neutral drag)*.

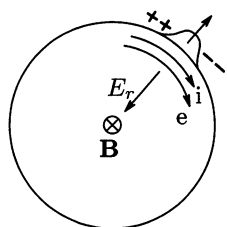


Рис. 8.3. Разделение зарядов из-за различия скоростей ионов и электронов

Если инкремент $\gamma \sim (gk_y)^{1/2}$ не очень велик, а ларморовский радиус ионов ρ_{Ω}^i достаточно большой, так что

$$(k_y \rho_{\Omega}^i)^2 > \frac{\gamma}{|\Omega_i|},$$

то возмущение стабилизируется [3]. Когда ларморовский радиус ионов становится большим, среднее на орбите электрическое поле возмущения \mathbf{E} , воспринимаемое ионами, ларморовский радиус которых велик, отличается от поля, действующего на электроны, поэтому скорости $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ дрейфов ионов и электронов тоже различны. Возникающее при этом разделение зарядов имеет противоположную фазу по сравнению с разделением зарядов из-за ускорения и стабилизирует неустойчивость.

8.1б. Критерий устойчивости перестановочной моды, магнитная яма

Предположим, что магнитные силовые линии имеют «хорошую» кривизну в области В и «плохую» — в области А (рис. 8.4, а). Тогда центробежная сила в А и В направлена

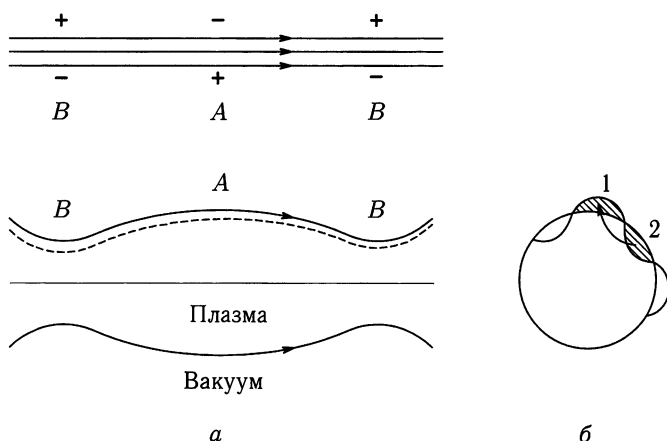


Рис. 8.4. Разделение зарядов в перестановочной неустойчивости: а — нижний рисунок показывает участки с неблагоприятной для устойчивости (А) и с благоприятной (В) кривизной магнитной силовой линии; верхний рисунок изображает разделение зарядов вследствие ускорения вдоль желобка; б — сечение возмущенной плазмы

в противоположные стороны, так что противоположно и разделение зарядов. Но эти заряды могут легко стечь вдоль магнитной силовой линии, так что задача устойчивости имеет теперь другой аспект. Рассмотрим возмущения, в которых магнитный поток и плазма области 1 меняются местами с магнитным потоком

и плазмой области 2 (перестановочные возмущения, рис. 8.4, б). Предполагается, что плазма имеет низкое давление, поэтому магнитное поле является почти вакуумным. Любое отклонение от вакуумного поля сопровождается возрастанием энергии возмущенного поля (это следует из уравнений Максвелла). Можно показать, что наиболее опасными являются возмущения с перестановкой равных магнитных потоков.

Энергия магнитного поля в магнитной трубке, образованной силовыми линиями, равна

$$Q_M = \int dr \frac{B^2}{2\mu_0} = \int dl S \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (8.12)$$

где l — координата вдоль магнитной силовой линии, а S — сечение магнитной силовой трубки. При постоянном вдоль трубки магнитном потоке $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$ энергия поля сводится к

$$Q_M = \frac{\Phi^2}{2\mu_0} \int \frac{dl}{S}.$$

Изменение δQ_M магнитной энергии из-за перестановки потоков областей 1 и 2 есть

$$\delta Q_M = \frac{1}{2\mu_0} \left(\left(\Phi_1^2 \int_2 \frac{dl}{S} + \Phi_2^2 \int_1 \frac{dl}{S} \right) - \left(\Phi_1^2 \int_1 \frac{dl}{S} + \Phi_2^2 \int_2 \frac{dl}{S} \right) \right). \quad (8.13)$$

Если переставленные потоки Φ_1 и Φ_2 равны, то изменение энергии δQ_M равно нулю, так что возмущения с $\Phi_1 = \Phi_2$ наиболее опасны.

Кинетическая энергия Q_p плазмы в объеме \mathcal{V} равна

$$Q_p = \frac{nT\mathcal{V}}{\gamma - 1} = \frac{p\mathcal{V}}{\gamma - 1}, \quad (8.14)$$

где γ — показатель адиабаты. Для адиабатического возмущения величина

$$p\mathcal{V}^\gamma = \text{const},$$

то есть сохраняется в процессе перестановок. Изменение энергии плазмы

$$\delta Q_p = \frac{1}{\gamma - 1} \left(p'_2 \mathcal{V}_2 - p_1 \mathcal{V}_1 + p'_1 \mathcal{V}_1 - p_2 \mathcal{V}_2 \right),$$

где p'_2 — давление после перестановки из области \mathcal{V}_1 в \mathcal{V}_2 , а p'_1 — давление после перестановки из области \mathcal{V}_2 в \mathcal{V}_1 . Вследствие

адиабатичности имеем $p'_2 = p_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^\gamma$, $p'_1 = p_2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^\gamma$, и

$$\delta Q_p = \frac{1}{\gamma - 1} \left(p_1 \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^\gamma \nu_2 - p_1 \nu_1 + p_2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^\gamma \nu_1 - p_2 \nu_2 \right). \quad (8.15)$$

Полагая

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \delta p, \\ \nu_2 &= \nu_1 + \delta \nu, \end{aligned}$$

можно записать δQ_p как

$$\delta Q_p = \delta p \delta \nu + \gamma p \frac{(\delta \nu)^2}{\nu}. \quad (8.16)$$

Поскольку условие устойчивости имеет вид $\delta Q_p > 0$, то достаточное условие есть

$$\delta p \delta \nu > 0.$$

Выражая объем как

$$\nu = \int dl S = \Phi \int \frac{dl}{B},$$

запишем условие устойчивости перестановочной моды в виде

$$\delta p \delta \int \frac{dl}{B} > 0.$$

Обычно давление спадает наружу ($\delta p < 0$), так что для устойчивости интеграл должен также убывать наружу [4],

$$\delta \int \frac{dl}{B} < 0. \quad (8.17)$$

Интеграл следует брать только по области, занятой плазмой.

Пусть объем внутри магнитной поверхности ψ есть V , а магнитный поток в тороидальном направлении φ внутри магнитной поверхности ψ есть Φ . Определим *удельный объем* U как

$$U = \frac{dV}{d\Phi}. \quad (8.18)$$

Если обозначить единичный вектор вдоль магнитного поля \mathbf{b} , а нормальный единичный вектор элемента поверхности сечения dS (рис. 8.5) через \mathbf{n} , то

$$dV = \int \sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i S_i dl, \quad d\Phi = \sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i.$$

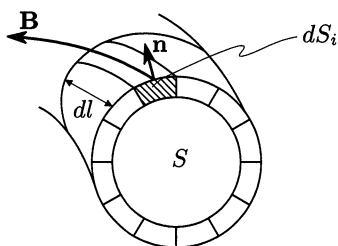


Рис. 8.5. Удельный объем тороидального поля

Интеграл по l берется вдоль маленькой трубки магнитного поля, величина $\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i dS_i B_i$ не зависит от l (сохранение магнитного потока). Если магнитные силовые линии замыкаются после одного обхода тора, удельный объем U равен

$$U = \frac{\oint \left(\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i dS_i \right) dl}{\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i} = \frac{\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i \oint \frac{dl}{B_i}}{\sum_i (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})_i B_i dS_i}.$$

Поскольку $\oint dl/B_i$ постоянен на одной и той же магнитной поверхности ¹⁾, U сводится к

$$U = \oint \frac{dl}{B}.$$

Если магнитные силовые линии замыкаются после N обходов, величина U равна

$$U = \frac{1}{N} \int \frac{dl}{B}. \quad (8.19)$$

Если магнитные силовые линии вообще не замыкаются, U дается выражением

$$U = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int \frac{dl}{B}.$$

Таким образом, U может рассматриваться как среднее значение $1/B$. Когда U убывает наружу, это означает, что величина B магнитного поля в среднем возрастает наружу, так что в плазме в данном случае реализуется так называемый *средний минимум*

¹⁾ В равновесии (см. гл. 6). — *Примеч. ред.*

B . Другими словами, условие устойчивости перестановочной неустойчивости сводится к условию среднего минимума B ,

$$\frac{dU}{d\Phi} = \frac{d^2V}{d\Phi^2} < 0. \quad (8.20)$$

Если величина U на магнитной оси и на наиболее дальней магнитной поверхности есть U_0 и U_a соответственно, то *глубина магнитной ямы*, $-\Delta U/U$, определяется как

$$-\frac{\Delta U}{U} = \frac{U_0 - U_a}{U_0}. \quad (8.21)$$

8.1с. Сосисочная неустойчивость (перетяжки)

Рассмотрим цилиндрическую плазму с резкой границей. Внутри плазмы существует только продольное магнитное поле B_z , а вне плазмы — только азимутальное поле $H_\theta = I_z/2\pi r$, связанное с током в плазме I_z . Исследуем азимутально симметричное возмущение плазмы, напоминающее перетяжку на сосиске (рис. 8.6). Когда радиус плазмы a изменяется на величину δa , сохранение магнитного потока и тока в плазме дает

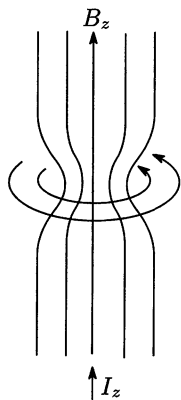


Рис. 8.6. Неустойчивость перетяжки

$$\begin{aligned} \delta B_z &= -B_z \frac{2\delta a}{a}, \\ \delta B_\theta &= -B_\theta \frac{\delta a}{a}. \end{aligned}$$

Продольное магнитное поле внутри плазмы противодействует возмущению, тогда как внешнее азимутальное поле дестабилизирует это возмущение. Различие δp_m в магнитных давлениях

$$\delta p_m = -\frac{B_z^2}{\mu_0} \frac{2\delta a}{a} + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} \frac{\delta a}{a}.$$

Плазма устойчива, если $\delta p_m > 0$ при $\delta a < 0$, так что условие устойчивости сводится к

$$B_z^2 > \frac{B_\theta^2}{2}. \quad (8.22)$$

Такой тип неустойчивости называется *сосичной неустойчивостью*, или *неустойчивостью перетяжки*.

8.1d. Винтовая неустойчивость (змейки)

Рассмотрим возмущение, которое изгибает плазменный шнур в виде змейки, так, как показано на рис. 8.7. Конфигурация

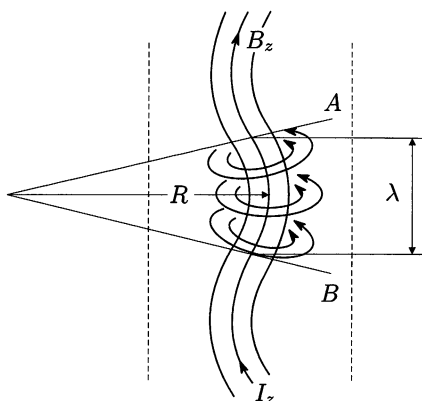


Рис. 8.7. Неустойчивость змейки

плазмы такая же, как и в предыдущем подразделе, то есть резкая граница, продольное поле внутри и азимутальное снаружи. Обозначим характерную длину возмущения через λ , а его радиус кривизны — R . Продольное магнитное поле действует на плазму как возвращающая сила вследствие возникающего продольного натяжения; эта возвращающая сила, действующая на плазму длины λ , равна

$$\frac{B_z^2}{2\mu_0} \pi a^2 \frac{\lambda}{R}.$$

Азимутальное магнитное поле увеличивается на внутренней (вогнутой) стороне плазменного шнура и дестабилизирует его. Чтобы оценить эту дестабилизирующую силу, рассмотрим цилиндрическую боковую поверхность радиуса λ вокруг плазмы и две плоскости А и В, проходящие через центр кривизны (см. рис. 8.7). Сравним вклады магнитного давления на поверхностях, замыкающих элемент змейки. Вклад магнитного давления на цилиндрической поверхности пренебрежимо мал по сравнению с этим вкладом на плоскостях А и В. Вклад магнитного давления на плоскостях А и В есть

$$\int_a^\lambda \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} 2\pi r dr \times \frac{\lambda}{2R} = \frac{B_\theta^2(a)}{2\mu_0} \pi a^2 \ln \frac{\lambda}{a} \times \frac{\lambda}{R}.$$

Соответственно

$$\frac{B_z^2}{B_\theta^2(a)} > \ln \frac{\lambda}{a} \tag{8.23}$$

— условие устойчивости [3]. Однако справедлив баланс давлений,

$$p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_\theta^2}{2\mu_0},$$

так что возмущения с большой λ неустойчивы. Этот тип неустойчивости называется *винтовой неустойчивостью*, или *кинк-неустойчивостью*¹⁾.

В этом разделе качественно анализировалась цилиндрическая плазма с резкой границей. Более общим и систематическим образом устойчивость цилиндрического плазменного шнура будет изучаться в разд. 8.2.

§ 8.2. Устойчивость в магнитной гидродинамике

8.2а. Линеаризация магнитогидродинамических уравнений

Устойчивость плазмы можно исследовать, анализируя бесконечно малые возмущения равновесного состояния. Если обозначить плотность, давление, скорость течения и магнитное поле как ρ_m , p , \mathbf{V} , и \mathbf{B} соответственно, то уравнение движения, закон сохранения массы, закон Ома и уравнение адиабаты можно записать в виде

$$\rho_m \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{V}) = 0,$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \right) (p \rho_m^{-\gamma}) = 0$$

(γ — показатель адиабаты). Кроме того, уравнения Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Вместе они составляют магнитогидродинамические уравнения для описания плазмы с нулевым удельным сопротивлением (см. разд. 5.2). Значения величин ρ_m , p , \mathbf{V} , и \mathbf{B} в положении рав-

¹⁾ Русская и английская терминология здесь несколько различны. Словом «kink» в английском языке обозначают и простой изгиб, и скручивающую деформацию. Если продольное магнитное поле присутствует, как предположено в данном разделе, лишь внутри шнура с током, то развивающаяся неустойчивость называется неустойчивостью змейки. Если же продольное поле существует и вне шнура, то изгиб сопровождается скручиванием, и шнур приобретает форму винта — в этом случае неустойчивость называется винтовой. В силу большей распространенности и физичности последнего случая кинк-неустойчивость обычно идентифицируют как винтовую, см. разд. 8.3а. — *Примеч. ред.*

новесия обозначим как ρ_{m0} , p_0 , $\mathbf{V}_0 = 0$, и \mathbf{B}_0 соответственно, а возмущения первого порядка малости — как ρ_{m1} , p_1 , $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}$, и \mathbf{B}_1 . Уравнения нулевого порядка таковы:

$$\nabla p_0 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad \nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0.$$

Выпишем линеаризованные уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial \rho_{m1}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m0} \mathbf{V}) = 0, \quad (8.24)$$

$$\rho_{m0} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla p_1 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0, \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (8.26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0). \quad (8.27)$$

Если $\xi(\mathbf{r}_0, t)$ — смещение плазмы от положения равновесия \mathbf{r}_0 , то

$$\xi(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{V} = \frac{d\xi}{dt} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Уравнение (8.27) сводится к

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right),$$

причем

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0). \quad (8.28)$$

Из $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ следует, что

$$\mu_0 \mathbf{j}_1 = \nabla \times \mathbf{B}_1. \quad (8.29)$$

Уравнения (8.24) и (8.26) дают

$$\rho_{m1} = -\nabla \cdot (\rho_{m0} \xi), \quad (8.30)$$

$$p_1 = -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi. \quad (8.31)$$

Подстановка этих формул в (8.25) дает

$$\begin{aligned} \rho_{m0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \nabla (\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi) + \\ &+ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = \\ &= -\nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} ((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Это линеаризованное уравнение движения, записанное через функцию ξ .

Теперь рассмотрим граничные условия. Там, где плазма касается идеального проводника, продольная составляющая электрического поля равна нулю, то есть $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$, вектор нормали \mathbf{n} направлен наружу. Это эквивалентно $\mathbf{n} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) = 0$. При этом должны также выполняться условия $(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}) = 0$ и $(\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}) = 0$. Полное давление на границе плазма—вакуум должно быть непрерывным, так что

$$p - p_0 + \frac{B_{\text{in}}^2 - B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} = \frac{B_{\text{ex}}^2 - B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0}$$

где \mathbf{B}_{in} , $\mathbf{B}_{0,\text{in}}$ обозначают магнитное поле внутри плазмы, а \mathbf{B}_{ex} , $\mathbf{B}_{0,\text{ex}}$ — снаружи. Разложение $\mathbf{B}_{\text{in}}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_{\text{ex}}(\mathbf{r})$ и $p(\mathbf{r})$ в ряд по $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ ($f(\mathbf{r}) = f_0(\mathbf{r}_0) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)f_0(\mathbf{r}) + f_1$) сводит граничное условие к

$$\begin{aligned} -\gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \frac{\mathbf{B}_{0,\text{in}} \cdot (\mathbf{B}_{1,\text{in}} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{B}_{0,\text{in}})}{\mu_0} = \\ = \frac{\mathbf{B}_{0,\text{ex}} \cdot (\mathbf{B}_{1,\text{ex}} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)\mathbf{B}_{0,\text{ex}})}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Граничные условия, соответствующие уравнениям Максвелла, таковы:

$$\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{B}_{0,\text{in}} - \mathbf{B}_{0,\text{ex}}) = 0, \quad (8.34)$$

$$\mathbf{n}_0 \times (\mathbf{B}_{0,\text{in}} - \mathbf{B}_{0,\text{ex}}) = \mu_0 \mathbf{K}, \quad (8.35)$$

где \mathbf{K} — поверхностный ток.

Закон Ома в плазме

$$\mathbf{E}_{\text{in}} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{0,\text{in}} = 0. \quad (3.36)$$

Поскольку электрическое поле \mathbf{E}^* в системе координат, движущейся вместе с плазмой, равно $\mathbf{E}^* = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_0$ и поскольку тангенциальная компонента электрического поля \mathbf{E}^* непрерывна поперек границы плазмы, граничное условие можно записать в виде

$$\mathbf{E}_t + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{0,\text{ex}})_t = 0, \quad (8.37)$$

где нижний индекс указывает на тангенциальную компоненту. Так как нормальная компонента \mathbf{B} связана с тангенциальной компонентой \mathbf{E} соотношением $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, то (8.37) сводится к

$$(\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}_{1,\text{ex}}) = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_{0,\text{ex}}). \quad (8.38)$$

Электрическое \mathbf{E}_{ex} и магнитное \mathbf{B}_{ex} поля снаружи плазмы (в вакууме) можно выразить через векторный потенциал,

$$\mathbf{E}_{\text{ex}} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_{1,\text{ex}} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Раз в вакууме ток отсутствует, то \mathbf{A} удовлетворяет уравнению

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0. \quad (8.39)$$

Используя векторный потенциал, можно переписать (8.37) как

$$\mathbf{n}_0 \times \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}_{0,\text{ex}} \right) = 0.$$

Для $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{B}_{0,\text{in}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_{0,\text{ex}} = 0$ граничное условие имеет вид

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{A} = -\xi_n \mathbf{B}_{0,\text{ex}}. \quad (8.40)$$

На идеально проводящей стенке граничное условие выглядит как

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0. \quad (8.41)$$

Теперь задача устойчивости сводится к решению уравнений (8.32) и (8.39) при граничных условиях (8.33), (8.38), (8.40) и (8.41). Для нормальной моды $\xi(\mathbf{r}, t) = \xi(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ проблема сводится к задаче на собственные значения, $\rho_0 \omega^2 \xi = \mathbf{F}(\xi)$. Если какое-либо собственное значение отрицательно, то плазма неустойчива, а если все собственные значения положительны, то плазма устойчива.

8.2б. Энергетический принцип [5]

В общем случае задача на собственные значения сложна и трудна для решения. Но эту задачу можно упростить, введя потенциальную энергию, связанную со смещением плазмы ξ . Уравнение движения имеет вид

$$\rho_{m0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi) = -\widehat{\mathbf{K}} \cdot \xi. \quad (8.42)$$

Это уравнение может быть проинтегрировано:

$$\frac{1}{2} \int \rho_{m0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dr + \frac{1}{2} \int \xi \cdot \widehat{\mathbf{K}} \xi dr = \text{const.}$$

Кинетическая T и потенциальная W энергии суть

$$T \equiv \frac{1}{2} \int \rho_{m0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dr, \quad W \equiv \frac{1}{2} \int \xi \cdot \widehat{\mathbf{K}} \xi dr = -\frac{1}{2} \int \xi \cdot \mathbf{F}(\xi) dr$$

соответственно. Если

$$W > 0$$

для всех возможных смещений, то система устойчива. Это — условие устойчивости в форме *энергетического принципа*. W называется *интегралом энергии*.

Можно доказать, что оператор $\widehat{\mathbf{K}}$ является эрмитовым (самосопряженным) [6, 7]. Введем смещение $\boldsymbol{\eta}$ и векторный потенциал \mathbf{Q} , удовлетворяющие тем же граничным условиям, что $\boldsymbol{\xi}$ и \mathbf{A} , то есть

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q} = -\eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}}$$

на границе плазма—вакуум и

$$\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q} = 0$$

на проводящей стенке. Используя (8.32), преобразуем следующий интеграл по области плазмы V_{in} :

$$\begin{aligned} \int_{V_{\text{in}}} \boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{r} = & \int_{V_{\text{in}}} \left(\gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) + \right. \\ & + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) - \\ & \left. - \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\eta} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \right) d\mathbf{r} + \\ & + \int_S \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \left(\frac{\mathbf{B}_{0,\text{in}} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_{0,\text{in}})}{\mu_0} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) \right) dS. \quad (8.43) \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим поверхностный интеграл в (8.43). С помощью граничного условия $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q} = -\eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}}$ находим

$$\begin{aligned} \int_S \eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}} \cdot \mathbf{B}_{1,\text{ex}} dS &= \int_S \eta_m \mathbf{B}_{0,\text{ex}} (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \\ &= - \int_S (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) dS = \\ &= - \int_S \mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{Q} \times (\nabla \times \mathbf{A})) dS = \int_{V_{\text{ex}}} \nabla \cdot (\mathbf{Q} \times (\nabla \times \mathbf{A})) d\mathbf{r} = \\ &= \int_{V_{\text{ex}}} ((\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{Q} \cdot \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})) d\mathbf{r} = \\ &= \int_{V_{\text{ex}}} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Из граничного условия (8.33) следует, что разность между этим поверхностным интегралом и поверхностным интегралом в (8.43) равна

$$\begin{aligned} & \int \eta_n \left(\frac{\mathbf{B}_{0,\text{in}} \cdot \mathbf{B}_{1,\text{in}} - \mathbf{B}_{0,\text{ex}} \cdot \mathbf{B}_{1,\text{ex}}}{\mu_0} - \gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) p_0 \right) dS = \\ & = \int_S \eta_n (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla) \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS = \\ & = \int_S \eta_n \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS. \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение $\mathbf{n}_0 \times \nabla(p_0 + B_{0,\text{in}}^2/2\mu_0 - B_{0,\text{ex}}^2/2\mu_0) = 0$. Интегрирование ведется по области V_{ex} вне плазмы. В конце концов, интеграл энергии сводится к

$$\begin{aligned} \int_{V_{\text{in}}} \boldsymbol{\eta} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{r} = & \int_{V_{\text{in}}} \left(\gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) + \right. \\ & + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) + \\ & + (\nabla \cdot \boldsymbol{\eta}) (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) - \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\eta} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \Big) d\mathbf{r} + \\ & + \frac{1}{\mu_0} \int_{V_{\text{ex}}} (\nabla \times \mathbf{Q}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\mathbf{r} + \\ & + \int_S \eta_n \xi_n \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS. \quad (8.44) \end{aligned}$$

Интеграл энергии W распадается на три — интеграл W_p по области внутри плазмы V_{in} , W_S по границе S и W_V по внешней вакуумной области V_{ex} , то есть

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{in}}} \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{r} = W_p + W_S + W_V, \quad (8.45)$$

$$W_p = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{in}}} \left(\gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0))^2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p_0) - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\mu_0} (\boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \Big) d\mathbf{r} = \\
 & = \frac{1}{2} \int_{V_{\text{in}}} \left(\frac{B_1^2}{\mu_0} - p_1 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}) - \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1) \right) d\mathbf{r}, \quad (8.46)
 \end{aligned}$$

$$W_S = \frac{1}{2} \int_S \xi_n^2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0,\text{ex}}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,\text{in}}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS, \quad (8.47)$$

$$W_V = \frac{1}{2\mu_0} \int_{V_{\text{ex}}} (\nabla \times \mathbf{A})^2 d\mathbf{r} = \int_{V_{\text{ex}}} \frac{B_1^2}{2\mu_0} d\mathbf{r}. \quad (8.48)$$

Положительность W для всех возможных $\boldsymbol{\xi}$ и есть условие устойчивости. Частота (инкремент) возмущения может быть получена из интеграла энергии. Для возмущения $\sim \exp(-i\omega t)$, уравнение движения принимает вид

$$\omega^2 \rho_{m0} \boldsymbol{\xi} = \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi}. \quad (8.49)$$

Решение этой задачи на собственные значения дает тот же результат, что и решение, основанное на вычислении вариаций $\delta^2 W = 0$, а именно,

$$\omega^2 = \frac{\int \boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} d\mathbf{r}}{\int \rho_{m0} \boldsymbol{\xi}^2 d\mathbf{r}}. \quad (8.50)$$

Поскольку $\widehat{\mathbf{K}}$ — эрмитовый оператор, ω^2 действительна. В МГД анализе идеальной плазмы с нулевым сопротивлением возмущение либо монотонно нарастает, либо монотонно убывает во времени, или же возмущенная плазма осциллирует с постоянной амплитудой¹⁾.

¹⁾ Это не вполне точное утверждение, к сожалению, часто встречается в литературе. Уравнение (8.49) — это уравнение на собственные значения ω^2 и собственные функции $\boldsymbol{\xi}$, для которых (8.50) является прямым следствием (8.49). Величина же W в (8.45) рассчитывается по произвольному пробному смещению $\boldsymbol{\xi}$, для которого формально записанное выражение (8.50) не является, вообще говоря, собственной частотой. Другое дело, что если W положительна для *любого* $\boldsymbol{\xi}$, то, в соответствии с (8.50), неустойчивой собственной моды просто не существует. Можно доказать и обратное утверждение, иногда называемое теоремой Бернштейна, что если существует пробное возмущение с $W < 0$, то найдется и собственная неустойчивая мода. Тем не менее, произвольное возмущение представляет собой в общем случае суперпозицию

Интеграл энергии (8.46) может быть преобразован к более простому виду. Это преобразование описано в приложении В. Там же выписан и интеграл энергии для осесимметричной тороидальной системы.

§ 8.3. Неустойчивости цилиндрической плазмы

8.3а. Неустойчивости плазмы с резкой границей: критерий Крускала—Шафранова

Рассмотрим плазму радиуса a с резкой границей и продольным магнитным полем B_{0z} на этой границе, а также продольным магнитным полем B_{ez} и азимутальным магнитным полем $B_\theta = \mu_0 I / (2\pi r)$ вне плазмы (рис. 8.8). Предполагается, что B_{0z} и B_{ez} постоянны. Можно рассмотреть смещение

$$\xi(r) \exp(im\theta + ikz), \quad (8.51)$$

поскольку любое смещение может быть выражено как суперпозиция таких мод. Так как член в $\nabla \cdot \xi$ в интеграле энергии положителен, то наиболее опасным является несжимаемое возмущение. Исследуем лишь наихудшую моду,

$$\nabla \cdot \xi = 0. \quad (8.52)$$

Возмущение магнитного поля $\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$ равно

$$\mathbf{B}_1 = ikB_{0z}\xi. \quad (8.53)$$

Уравнение движения (8.32) принимает вид

$$\left(-\omega^2 \rho_{m0} + \frac{k^2 B_{0z}^2}{\mu_0}\right) \xi = -\nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0}\right) \equiv -\nabla p^*. \quad (8.54)$$

Поскольку $\nabla \cdot \xi = 0$, отсюда следует, что $\Delta p^* = 0$, т. е.

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2}\right)\right) p^*(r) = 0. \quad (8.55)$$

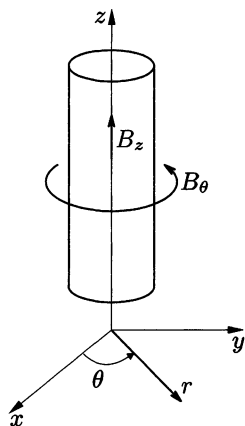


Рис. 8.8. Плазма с резкой границей

собственных мод, которые могут быть как устойчивы, так и нет, так что итоговая временная зависимость может быть весьма сложной. — *Примеч. ред.*

Решение без особенности в точке $r = 0$ дается модифицированной функцией Бесселя $I_m(kr)$, так что $p^*(r)$ равно

$$p^*(r) = p^*(a) \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)}.$$

Соответственно, находим

$$\xi_r(a) = \frac{kp^*(a)}{I_m(ka)} \frac{I'_m(ka)}{\omega^2 \rho_{m0} - \frac{k^2 B_0^2}{\mu_0}}. \quad (8.56)$$

Поскольку возмущение вакуумного магнитного поля \mathbf{B}_{1e} удовлетворяет уравнениям $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ и $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, величину \mathbf{B}_{1e} можно представить как $\mathbf{B}_{1e} = \nabla \psi$. Скалярный магнитный потенциал ψ удовлетворяет условиям $\Delta \psi = 0$ и $\psi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда

$$\psi = C \frac{K_m(kr)}{K_m(ka)} \exp(im\theta + ikz). \quad (8.57)$$

Граничное условие (8.33) выглядит как

$$\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1 &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{B}_{1e} + (\xi \cdot \nabla) \left(\frac{B_e^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} - p_0 \right) = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{B}_{1e} + (\xi \cdot \nabla) \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $B_\theta \propto 1/r$, то $p^*(a)$ дается выражением

$$p^*(a) = \frac{i}{\mu_0} \left(kB_{ez} + \frac{m}{a} B_\theta \right) C - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 a} \xi_r(a). \quad (8.58)$$

Граничное условие (8.38) сводится к

$$Ck \frac{K'_m(ka)}{K_m(ka)} = i \left(kB_{ez} + \frac{m}{a} B_\theta \right) \xi_r(a). \quad (8.59)$$

Из (8.56), (8.58) и (8.59) получаем дисперсионное соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2} &= \frac{B_{0z}^2}{\mu_0 \rho_{m0}} - \frac{(kB_{ez} + (m/a)B_\theta)^2}{\mu_0 \rho_{m0} k^2} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \frac{K_m(ka)}{K'_m(ka)} - \\ &\quad - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \frac{1}{(ka)} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}. \quad (8.60) \end{aligned}$$

Здесь первый и второй члены представляют стабилизирующий эффект от B_{0z} и B_{ez} ($K_m/K'_m < 0$). Если волновой вектор \mathbf{k} нормален к магнитному полю, т. е. если

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_e) = kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta = 0,$$

то возмущение желобковое, и второй (стабилизирующий) член в (8.60) становится равным нулю. Третье слагаемое дестабилизирующее.

(1). Мода с $m = 0$ при $B_{ez} = 0$. Эта конфигурация соответствует неустойчивости перетяжки, описанной в разд. 8.1с. Уравнение (8.60) сводится к

$$\omega^2 = \frac{B_{0z}^2 k^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \left(1 - \frac{B_\theta^2}{B_{0z}^2} \frac{I_0'(ka)}{(ka)I_0(ka)} \right). \quad (8.61)$$

Поскольку $I_0'(x)/xI_0(x) < 1/2$, условие устойчивости

$$B_{0z}^2 > B_\theta^2/2.$$

(2). Мода $m = 1$ при $B_{ez} = 0$. Для этой моды уравнение (8.60) имеет вид

$$\omega^2 = \frac{B_{0z}^2 k^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \left(1 + \frac{B_\theta^2}{B_{0z}^2} \frac{1}{(ka)} \frac{I_1'(ka) K_1(ka)}{I_1(ka) K_1'(ka)} \right). \quad (8.62)$$

Для возмущений с большой характерной длиной:

$$\omega^2 = \frac{B_{0z}^2 k^2}{\mu_0 \rho_{m0}} \left(1 - \left(\frac{B_\theta}{B_{0z}} \right)^2 \ln \frac{1}{ka} \right). \quad (8.63)$$

Дисперсионное соотношение соответствует винтовой (кинк) неустойчивости, которая неустойчива при возмущениях с большой длиной волны (см. (8.23)).

(3). Неустойчивость в случае $|B_{ez}| > |B_\theta|$. Если $|B_{ez}| \gg |B_\theta|$, неустойчивость может быть при $|ka| \ll 1$. Разлагая в ряд модифицированную функцию Бесселя (предполагается, что $m > 0$), находим

$$\mu_0 \rho_{m0} \omega^2 = k^2 B_{0z}^2 + \left(kB_{ez} + \frac{m}{a} B_\theta \right)^2 - \frac{m}{a^2} B_\theta^2. \quad (8.64)$$

Величина ω^2 минимальна при $\partial \omega / \partial k = 0$, т. е. когда $k(B_{0z}^2 + B_{ez}^2) + (m/a)B_\theta B_{ez} = 0$, и равна

$$\omega_{\min}^2 = \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho_{m0} a^2} \left(\frac{m^2 B_{0z}^2}{B_{ez}^2 + B_{0z}^2} - m \right) = \frac{B_\theta^2}{\mu_0 \rho_{m0} a^2} m \left(m \frac{1 - \beta}{2 - \beta} - 1 \right), \quad (8.65)$$

где $\beta = 2\mu_0 p / B_{ez}^2$. Соответственно, плазма неустойчива, когда $0 < m < (2 - \beta)/(1 - \beta)$. Для плазмы с низкой бета могут быть

неустойчивы лишь моды с $m = 1$ и $m = 2$. Если выполняется условие

$$\left(\frac{B_\theta}{B_z}\right)^2 < (ka)^2, \quad (8.66)$$

то плазма устойчива даже при $m = 1$. Обычно длина плазмы конечна, так что k не может быть меньше, чем $2\pi/L$. Соответственно, когда

$$\left|\frac{B_\theta}{B_z}\right| < 2\pi\frac{a}{L},$$

плазма устойчива. Это условие устойчивости называется *критерием Крускала—Шафранова* [8, 9].

Когда плазма окружена цилиндрической проводящей стенкой (кожухом) радиуса b , скалярный потенциал возмущения магнитного поля вне плазмы равен

$$\psi = \left(c_1 \frac{K_m(kr)}{K_m(ka)} + c_2 \frac{I_m(kr)}{I_m(ka)}\right) \exp(im\theta + ikz) \quad (8.57')$$

(вместо (8.57)). Граничное условие $B_{1er} = 0$ при $r = b$ дает

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{I'_m(kb)K_m(ka)}{K'_m(kb)I_m(ka)}.$$

Дисперсионное соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{k^2} = & \frac{B_{0z}^2}{\mu_0\rho_{m0}} - \frac{(kB_{ez} + (m/a)B_\theta)^2}{\mu_0\rho_{m0}k^2} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)} \times \\ & \times \left(\frac{K_m(ka)I'_m(kb) - I_m(ka)K'_m(kb)}{K'_m(ka)I'_m(kb) - I'_m(ka)K'_m(kb)} \right) - \\ & - \frac{B_\theta^2}{\mu_0\rho_{m0}} \frac{1}{(ka)} \frac{I'_m(ka)}{I_m(ka)}. \end{aligned}$$

Разлагая в ряд модифицированные функции Бесселя при условиях $ka \ll 1$, $kb \ll 1$, находим

$$\mu_0\rho_{m0}\omega^2 = k^2 B_{0z}^2 + \frac{1 + (a/b)^{2m}}{1 - (a/b)^{2m}} (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_\theta)^2 - \frac{m}{a^2} B_\theta^2.$$

Чем ближе располагается стенка к границе плазмы, тем сильнее эффект стабилизации этой стенкой.

В тороидальных системах $k = n/R$, где n — целое число, а R — большой радиус тора. Если ввести коэффициент запаса устойчивости q_a на границе плазмы $r = a$

$$q_a = \frac{aB_{ez}}{RB_\theta}, \quad (8.67)$$

то $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})$ можно записать как

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = (kB_{ez} + \frac{m}{a}B_{\theta}) = \frac{nB_{\theta}}{a} \left(q_a + \frac{m}{n} \right).$$

Тогда условие Крускала—Шафранова (8.66) для моды $m = 1$, $n = -1$ можно выразить через коэффициент запаса устойчивости:

$$q_a > 1. \quad (8.68)$$

Именно по этой причине величина q_a и названа коэффициентом запаса устойчивости.

8.3в. Неустойчивости плазмы с диффузной границей

Рассмотренная в разд. 8.3а конфигурация с резкой границей плазмы представляет собой особый случай; в большинстве же случаев ток в плазме убывает к границе постепенно. Рассмотрим конфигурацию с диффузной границей плазмы и равновесными параметрами

$$p_0(r), \quad \mathbf{B}_0(r) = (0, B_{\theta}(r), B_z(r)).$$

Возмущение ξ берется в виде

$$\xi = \xi(r) \exp(im\theta + ikz).$$

Возмущение магнитного поля $\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0)$ есть

$$B_{1r} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\xi_r, \quad (8.69)$$

$$B_{1\theta} = ikA - \frac{d}{dr}(\xi_r B_{\theta}), \quad (8.70)$$

$$B_{1z} = -\left(\frac{imA}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r B_z) \right) \quad (8.71)$$

где

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) = kB_z + \frac{m}{r}B_{\theta}, \quad (8.72)$$

$$A = \xi_{\theta}B_z - \xi_z B_{\theta} = (\xi \times \mathbf{B}_0)_r. \quad (8.73)$$

Поскольку члены с давлением $\gamma p_0(\nabla \cdot \xi)^2 + (\nabla \cdot \xi)(\xi \cdot \nabla p_0) = (\gamma - 1)p_0(\nabla \cdot \xi)^2 + (\nabla \cdot \xi)(\nabla \cdot p_0 \xi)$ в интеграле энергии неотрицательны, опять рассмотрим несжимаемое смещение $\nabla \cdot \xi = 0$, т. е.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r) + \frac{im}{r}\xi_{\theta} + ik\xi_z = 0. \quad (8.74)$$

Отсюда и из соотношения (8.73) для A компоненты смещения ξ_θ и ξ_z выражаются через ξ_r и A :

$$i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_\theta = ikA - \frac{B_\theta}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r), \quad (8.75)$$

$$-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_z = \frac{imA}{r} + \frac{B_z}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r). \quad (8.76)$$

Из $\mu_0 \mathbf{j}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_0$ следует, что

$$\mu_0 j_{0\theta} = -\frac{dB_z}{dr}, \quad (8.77)$$

$$\mu_0 j_{0z} = \frac{dB_\theta}{dr} + \frac{B_\theta}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta). \quad (8.78)$$

Члены в интеграле энергии даются выражениями

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{4} \int_{V_{in}} \left(\gamma p_0 |\nabla \cdot \xi|^2 + (\nabla \cdot \xi^*)(\xi \cdot \nabla p_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_1|^2 - \xi^* \cdot (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_1) \right) dr = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(-p_1 (\nabla \cdot \xi) + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_1|^2 - \mathbf{j}_0 (\mathbf{B}_1 \times \xi^*) \right) dr, \quad (8.79) \end{aligned}$$

$$W_S = \frac{1}{4} \int_S |\xi_n|^2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{B_{0,ex}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{0,in}^2}{2\mu_0} - p_0 \right) dS, \quad (8.80)$$

$$W_V = \frac{1}{4\mu_0} \int_{V_{ex}} |\mathbf{B}_1|^2 dr. \quad (8.81)$$

Величины ξ_θ и ξ_z в (8.79) могут быть исключены с помощью (8.75) и (8.76), а dB_z/dr и dB_θ/dr — с помощью (8.77) и (8.78). Тогда W_p становится равным

$$\begin{aligned} W_p &= \frac{1}{4} \int_{V_{in}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2}{\mu_0} |\xi_r|^2 + \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \frac{|A|^2}{\mu_0} + \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \left| B_\theta \frac{d\xi_r}{dr} + \xi_r \left(\mu_0 j_z - \frac{B_\theta}{r} \right) \right|^2 + \frac{1}{\mu_0} \left| \frac{\xi_r B_z}{r} + B_z \frac{d\xi_r}{dr} \right|^2 + \\ &\quad + \frac{2}{\mu_0} \operatorname{Re} \left(ikA^* \left(B_\theta \frac{d\xi_r}{dr} + \left(\mu_0 j_z - \frac{B_\theta}{r} \right) \xi_r \right) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{imA^*}{r^2} \left(\xi_r B_z + r B_z \frac{d\xi_r}{dr} \right) + \\
 & + 2 \operatorname{Re} \left(\xi_r^* j_{0z} \left(-B_\theta \frac{d\xi_r}{dr} - \frac{\xi_r \mu_0 j_z}{2} + ikA \right) \right) dr.
 \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение в W_p можно представить в форме

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\mu_0} \left(k^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \times \\
 & \times \left| A + \frac{ikB_\theta((d\xi_r/dr) - \xi_r/r) - im(B_z/r)((d\xi_r/dr) + (\xi_r/r))}{k^2 + (m^2/r^2)} \right|^2 + \\
 & + \left(\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2}{\mu_0} - \frac{2j_z B_\theta}{r} \right) |\xi_r|^2 + \frac{B_z^2}{\mu_0} \left| \frac{d\xi_r}{dr} + \frac{\xi_r}{r} \right|^2 + \frac{B_\theta^2}{\mu_0} \left| \frac{d\xi_r}{dr} - \frac{\xi_r}{r} \right|^2 - \\
 & - \frac{|ikB_\theta((d\xi_r/dr) - (\xi_r/r)) - im(B_z/r)((d\xi_r/dr) + (\xi_r/r))|^2}{\mu_0(k^2 + (m^2/r^2))}.
 \end{aligned}$$

Оно минимально, когда

$$\begin{aligned}
 A & \equiv \xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta = \\
 & = - \frac{i}{k^2 + (m^2/r^2)} \left(\left(kB_\theta - \frac{m}{r} B_z \right) \frac{d\xi_r}{dr} - \left(kB_\theta + \frac{m}{r} B_z \right) \frac{\xi_r}{r} \right).
 \end{aligned}$$

При этом W_p сводится к

$$\begin{aligned}
 W_p & = \frac{\pi}{2\mu_0} \int_0^a \left(\frac{|(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)(d\xi_r/dr) + h(\xi_r/r)|^2}{k^2 + (m/r)^2} + \right. \\
 & \left. + \left((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 - \frac{2\mu_0 j_z B_\theta}{r} \right) |\xi_r|^2 \right) r dr, \quad (8.82)
 \end{aligned}$$

где

$$h \equiv kB_z - \frac{m}{r} B_\theta.$$

Теперь определим W_S . Из (6.8) следует, что $(d/dr)(p_0 + (B_z^2 + B_\theta^2)/2\mu_0) = -B_\theta^2/(r\mu_0)$. Величина B_θ^2 непрерывна на границе $r = a$, так что

$$\frac{d}{dr} \left(p_0 + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{B_{ez}^2 + B_{e\theta}^2}{2\mu_0} \right).$$

Соответственно, находим, что

$$W_S = 0, \quad (8.83)$$

как следует из (8.80).

Выражение для W_V можно получить, если в интеграле (8.82) для W_p положить $\mathbf{j} \rightarrow 0$, $B_z \rightarrow B_{ez} = B_s (= \text{const})$, $B_\theta \rightarrow B_{e\theta} = B_a a/r$, $B_{1r} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)\xi_r \rightarrow B_{e1r} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{e0})\eta_r$. Эта замена дает

$$W_V = \pi 2\mu_0 \int_a^b \left(\left(kB_s + \frac{m}{r} \frac{B_a a}{r} \right)^2 |\eta_r|^2 + \frac{[kB_s + (m/r)(B_a a/r)](d\eta_r/dr) + [kB_s - (m/r)(B_a a/r)]\eta_r/r^2}{k^2 + (m/r)^2} \right) r dr. \quad (8.84)$$

Интегрируя по частям, для W_p имеем

$$W_p = \frac{\pi}{2\mu_0} \int_0^a \left(\frac{r(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{k^2 + (m/r)^2} \left| \frac{d\xi_r}{dr} \right|^2 + g |\xi_r|^2 \right) dr + \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{k^2 B_s^2 - (m/a)^2 B_a^2}{k^2 + (m/a)^2} |\xi_r(a)|^2, \quad (8.85)$$

$$g = \frac{1}{r} \frac{(kB_s - (m/r)B_\theta)^2}{k^2 + (m/r)^2} + r(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 - \frac{2B_\theta}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{k^2 B_z^2 - (m/r)^2 B_\theta^2}{k^2 + (m/r)^2} \right). \quad (8.86)$$

Используя обозначение $\zeta \equiv rB_{e1r} = ir(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{e0})\eta_r$, находим

$$W_V = \frac{\pi}{2\mu_0} \int_a^b \left(\frac{1}{r(k^2 + (m/r)^2)} \left| \frac{d\zeta}{dr} \right|^2 + \frac{1}{r} |\zeta|^2 \right) dr. \quad (8.87)$$

Функции ξ_r или ζ , минимизирующие W_p или W_V , являются решениями уравнений Эйлера:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2}{k^2 + (m/r)^2} \frac{d\xi_r}{dr} \right) - g\xi_r = 0, \quad r \leq a, \quad (8.88)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r(k^2 + (m/r)^2)} \frac{d\zeta}{dr} \right) - \frac{1}{r} \zeta = 0, \quad r > a. \quad (8.89)$$

Есть два независимых решения для ξ_r с асимптотикой $\propto r^{m-1}$ или $\propto r^{-m-1}$ при $r \rightarrow 0$. Поскольку ξ_r конечно при $r = 0$, решение должно удовлетворять условиям

$$r \rightarrow 0, \quad \xi_r \propto r^{m-1},$$

$$\begin{aligned} r = a, \quad \zeta(a) &= ia \left(kB_s + \frac{m}{a} B_a \right) \xi_r(a), \\ r = b, \quad \zeta(b) &= 0. \end{aligned}$$

Используя (8.89), получим

$$W_V = \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{1}{r(k^2 + (m/r)^2)} \left| \frac{d\zeta}{dr} \zeta^* \right|_a^b. \quad (8.90)$$

Решение (8.89) выглядит следующим образом

$$\zeta = i \frac{I'_m(kr)K'_m(kb) - K'_m(kr)I'_m(kb)}{I'_m(ka)K'_m(kb) - K'_m(ka)I'_m(kb)} r \left(kB_s + \frac{m}{a} B_a \right) \xi_r(a). \quad (8.91)$$

Теперь решение проблемы устойчивости сводится к исследованию знака выражения $W_p + W_V$. Для этого используем запись

$$\left. \begin{aligned} W_p &= \frac{\pi}{2\mu_0} \int_0^a \left(f \left| \frac{d\xi_r}{dr} \right|^2 + g |\xi_r|^2 \right) dr + W_a, \\ W_a &= \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{k^2 B_s^2 - (m/a)^2 B_a^2}{k^2 + (m/a)^2} |\xi_r(a)|^2, \\ W_V &= \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{-1}{r(k^2 + (m/a)^2)} \left| \frac{d\zeta}{dr} \zeta^* \right|_{r=a}, \end{aligned} \right\} \quad (8.92)$$

где

$$f = \frac{r(kB_z + (m/r)B_\theta)^2}{k^2 + (m/r)^2}, \quad (8.93)$$

$$\begin{aligned} g &= \frac{1}{r} \frac{(kB_z - (m/r)B_\theta)^2}{k^2 + (m/r)^2} + r \left(kB_z + \frac{m}{r} B_\theta \right)^2 - \\ &\quad - \frac{2B_\theta}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} - \frac{d}{dr} \left(\frac{k^2 B_z^2 - (m/r)^2 B_\theta^2}{k^2 + (m/r)^2} \right). \end{aligned} \quad (8.94)$$

Если воспользоваться уравнением равновесия $\frac{d}{dr}(\mu_0 p + B^2/2) = -B_\theta^2/r$, то уравнение (8.94) для g сводится к

$$\begin{aligned} g &= \frac{2k^2}{k^2 + (m/r)^2} \mu_0 \frac{dp_0}{dr} + r \left(kB_z + \frac{m}{r} B_\theta \right)^2 \frac{k^2 + (m/r)^2 - (1/r)^2}{k^2 + (m/r)^2} + \\ &\quad + \frac{(2k^2/r)(k^2 B_z^2 - (m/r)^2 B_\theta^2)}{(k^2 + (m/r)^2)^2}. \end{aligned} \quad (8.95)$$

8.3с. Критерий Сайдема

В предыдущем разделе функция f в подынтегральном выражении для W_p всегда неотрицательна, $f \geq 0$, так что член с f является стабилизирующим. Первый и второй члены в соотношении (8.94) для g являются стабилизирующими, но 3-й и 4-й члены могут дать вклад в неустойчивость. Когда особенность

$$f \propto (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 = 0$$

уравнения Эйлера (8.88) находится в точке $r = r_0$ где-то внутри плазмы, то вклад стабилизирующего члена вблизи $r = r_0$ мал, так что опасной может быть локальная мода, развивающаяся вблизи особенности. Обозначая

$$r - r_0 = x, \quad f = \alpha x^2, \quad g = \beta, \quad \beta = \frac{2B_\theta^2}{B_0^2} \mu_0 \left. \frac{dp_0}{dr} \right|_{r=r_0},$$

$$\alpha = \frac{r_0}{k^2 r_0^2 + m^2} \left(kr \frac{dB_z}{dr} + kB_z + m \frac{dB_\theta}{dr} \right)_{r=r_0}^2 = \frac{r B_\theta^2 B_z^2}{B^2} \left(\frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} \right)_{r=r_0}^2,$$

$$\tilde{\mu} \equiv \frac{B_\theta}{r B_z},$$

приводим уравнение Эйлера к виду

$$\alpha \frac{d}{dr} \left(x^2 \frac{d\xi_r}{dx} \right) - \beta \xi_r = 0.$$

Его решение:

$$\xi_r = c_1 x^{-n_1} + c_2 x^{-n_2}, \quad (8.96)$$

где n_1 и n_2 даются выражениями

$$n^2 - n - \frac{\beta}{\alpha} = 0, \quad n_i = \frac{1 \pm (1 + 4\beta/\alpha)^{1/2}}{2}.$$

Если $\alpha + 4\beta > 0$, то n_1 и n_2 действительны. Справедливо равенство $n_1 + n_2 = 1$. При $n_1 < n_2$ имеем решение x^{-n_1} , называемое *малым решением*. Если же n комплексно ($n = \gamma \pm i\delta$), то ξ_r имеет вид $\exp((-\gamma \mp i\delta) \ln x)$ и осциллирует.

Рассмотрим локальную моду ξ_r , которая отлична от нуля только в ε -окрестности точки $r = r_0$, и положим

$$r - r_0 = \varepsilon t, \quad \xi_r(r) = \xi(t), \quad \xi(1) = \xi(-1) = 0.$$

Тогда W_p принимает вид

$$W_p = \frac{\pi}{2\mu_0} \varepsilon \int_{-1}^1 \left(\alpha t^2 \left| \frac{d\xi}{dt} \right|^2 + \beta |\xi|^2 \right) dt + O(\varepsilon^2).$$

Поскольку, согласно неравенству Шварца,

$$\int_{-1}^1 t^2 |\xi'|^2 dt \int_{-1}^1 |\xi|^2 dt \geq \left| \int_{-1}^1 t \xi' \xi^* dt \right|^2 = \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 |\xi|^2 dt \right)^2,$$

то

$$W_p > \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{1}{4} (\alpha + 4\beta) \int_{-1}^1 |\xi|^2 dt.$$

Условие устойчивости есть $\alpha + 4\beta > 0$, т. е.

$$\frac{r}{4} \left(\frac{\tilde{\mu}'}{\tilde{\mu}} \right)^2 + \frac{2\mu_0}{B_z^2} \frac{dp_0}{dr} > 0. \quad (8.97)$$

Величина $r(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu})$ называется *широм*. Наиболее часто $dp_0/dr < 0$, поэтому обычно второй член отрицателен. Первый член $(\tilde{\mu}'/\tilde{\mu})^2$ выражает стабилизирующую роль шира. Условие (8.97) называется *критерием Сайдема* [10]. Это необходимое условие устойчивости, но не всегда достаточное, поскольку критерий Сайдема выводится из рассмотрения поведения только локальной моды. Ньюкомб вывел необходимое и достаточное условия устойчивости цилиндрической плазмы. Его двенадцать теорем приведены в работе [11].

8.3d. Конфигурация токамака

В этом случае продольное магнитное поле B_s гораздо больше полоидального B_θ . Плазма находится при $r \leq a$, в области $a \leq r \leq b$ — вакуум, а идеально проводящая стенка расположена при $r = b$. Предполагается, что $ka \ll 1$, $kb \ll 1$. Функция ζ в выражении (8.90) для W_V будет равна

$$\zeta = i \frac{(mB_a + kaB_s)}{1 - (a/b)^{2m}} \xi_r(a) \frac{a^m}{b^m} \left(\frac{b^m}{r^m} - \frac{r^m}{b^m} \right)$$

(из (8.91)), и W_V принимает вид

$$W_V = \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{(mB_a + kaB_s)^2}{m} \xi_r^2(a) \lambda, \quad \lambda \equiv \frac{1 + (a/b)^{2m}}{1 - (a/b)^{2m}}.$$

Из условия периодичности для тора следует, что

$$\frac{2\pi n}{k} = -2\pi R \quad (n - \text{целое}),$$

так что $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V})$ дается выражением

$$a(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}) = mB_a + kaB_s = mB_a \left(1 - \frac{nq_a}{m}\right),$$

в котором фигурирует коэффициент запаса устойчивости. Член W_a в (8.92) сводится к

$$\begin{aligned} k^2 B_s^2 - \left(\frac{m}{a}\right)^2 B_a^2 &= \left(kB_s + \frac{m}{a}B_a\right)^2 - 2\frac{m}{a}B_a \left(kB_s + \frac{m}{a}B_a\right) = \\ &= \left(\frac{nB_a}{a}\right)^2 \left(\left(1 - \frac{nq_a}{m}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{nq_a}{m}\right)\right). \end{aligned}$$

Соответственно, интеграл энергии принимает вид

$$\begin{aligned} W_p + W_v &= \frac{\pi}{2\mu_0} B_a^2 \xi_r^2(a) \left(\left(1 - \frac{nq_a}{m}\right)^2 (1 + m\lambda) - 2\left(1 - \frac{nq_a}{m}\right)\right) + \\ &+ \frac{\pi}{2\mu_0} \int \left(f \left(\frac{d\xi_r}{dr}\right)^2 + g\xi_r^2\right) dr. \quad (8.98) \end{aligned}$$

Первый член в (8.98) отрицателен, когда

$$1 - \frac{2}{1 + m\lambda} < \frac{nq_a}{m} < 1. \quad (8.99)$$

Предположение $nq_a/m \sim 1$ соответствует $ka \sim mB_a/B_s$. Так как $B_a/B_s \ll 1$, то это совместимо с предположением $ka \ll 1$. При $m = 1$ величина $(m^2 - 1)/m^2$ во втором члене выражения (8.95) для g обращается в нуль. Величина g (порядка $k^2 r^2$) очень мала, поскольку $kr \ll 1$. Член в $f(d\xi_r/dr)^2$ может быть малым, если ξ_r почти постоянна. Соответственно, вклад интегрального слагаемого в (8.98) пренебрежимо мал. При $m = 1$ и $a^2/b^2 < nq_a < 1$ интеграл энергии становится отрицательным ($W < 0$). Мода $m = 1$ неустойчива в области (8.99) безотносительно к распределению тока. Условие Крускала—Шафранова для моды $m = 1$, введенное в случае конфигурации с резкой границей, применимо и к плазме с диффузной границей. Соответствующий инкремент

$\gamma^2 = -\omega^2$ равен

$$\gamma^2 \approx \frac{-W}{\int (\rho_{m0} |\xi|^2 / 2) dr} = \frac{1}{\langle \rho_{m0} \rangle \mu_0 a^2} \left(2(1 - nq_a) - \frac{2(1 - nq_a)^2}{1 - a^2/b^2} \right), \quad (8.100)$$

$$\langle \rho_{m0} \rangle = \frac{\int \rho_{m0} |\xi|^2 2\pi r dr}{\pi a^2 \xi_r^2(a)}.$$

Максимум инкремента $\gamma_{\max}^2 \sim (1 - a^2/b^2) B_a^2 / (\mu_0 \langle \rho \rangle a^2)$.

Если $m \neq 1$, то $(m^2 - 1)/m^2$ во втором члене (8.95) велико, и $g \sim 1$. Нужно оценить вклад интегрального члена в W_p в этом случае. Область $g < 0$ определяется неравенствами $\chi_1 < \chi < \chi_2$, когда $\chi \equiv -krB_z/B_\theta = nq(r)$ и

$$\chi_{1,2} = m - \frac{2}{m(m^2 - 1)} k^2 r^2 \pm \frac{2k^2 r^2}{m(m^2 - 1)} \left(1 - \frac{m^2(m^2 - 1) \mu_0 r \rho'_0}{2k^2 r^2 B_\theta^2} \right)^{1/2}. \quad (8.101)$$

Поскольку $kr \ll 1$, то расположенная вблизи особенности $nq(r) = m$ область $g < 0$ узка, и вкладом интегрального члена в W_p можно пренебречь. В результате, если величина nq_a/m находится в интервале (8.99), то плазма неустойчива из-за смещения $\xi_r(a)$ границы плазмы. Для распределения тока $j(r) = j_0 \exp(-\kappa^2 r^2/a^2)$ при проводящей стенке, расположенной на бесконечности ($b = \infty$), величина γ^2 может быть рассчитана из (8.100) с использованием решения уравнения Эйлера, и зависимость γ^2 от q_a может быть определена. Результат представлен на рис. 8.9.

Если величина nq_a/m находится вне диапазона, определяемого (8.99), то эффект смещения границы плазмы невелик, и вклад интегрального члена в W_p является определяющим. Однако инкремент γ^2 при этом в $(kr)^{-2}$ раз меньше, чем (8.100), как это ясно из (8.101).

8.3е. Пинч с обращенным полем [12]

Характеристики пинча с обращенным полем (*reversed field pinch*) таковы, что B_a и B_s являются величинами одного порядка, так что приближение, основанное на условии $ka \ll 1$, или $B_a \ll \ll B_s$, более уже не применимо. Как следует из выражения (8.82)

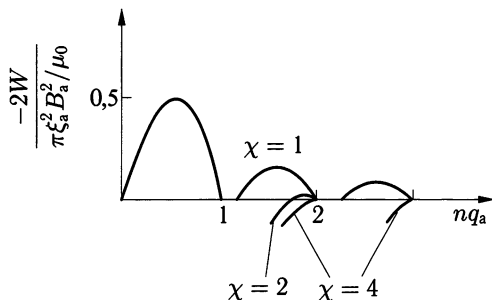


Рис. 8.9. Связь инкремента γ и nq_a для винтовой неустойчивости $(-2W/(\pi\xi_a^2 B_a^2/\mu_0) = \gamma^2 a^2 (\langle \rho_{m0} \rangle \mu_0 / B_a^2))$ — согласно работе Шаfranова В. Д. ЖТФ. 1970. Т. 40. С. 241

для W_p , плазма устойчива, если везде выполняется неравенство

$$2\mu_0 j_z \frac{B_\theta}{r} = 2 \frac{B_\theta}{r^2} \frac{d}{dr} (r B_\theta) = \frac{1}{r^3} \frac{d}{dr} (r B_\theta)^2 < 0. \quad (8.102)$$

Это условие достаточно для устойчивости, однако оно никогда не выполняется в реальных случаях. Если выражение (8.95) для g переписать через $P \equiv r B_z / B_\theta$ ($2\pi P$ есть шаг магнитной силовой линии), то получим

$$g = \frac{2(kr)^2 \mu_0}{m^2 + (kr)^2} \frac{dp_0}{dr} + \frac{B_\theta^2/r}{(m^2 + (kr)^2)^2} (kP + m) \times \\ \times (kP((m^2 + k^2 r^2)^2 - (m^2 - k^2 r^2)) + \\ + m((m^2 + k^2 r^2)^2 - (m^2 + 3k^2 r^2))). \quad (8.103)$$

При $m = 1$ величина g становится равной

$$g = \frac{2(kr)^2 \mu_0}{1 + (kr)^2} \frac{dp_0}{dr} + \\ + \frac{(kr)^2 B_\theta^2/r}{(1 + (kr)^2)^2} (kP + 1)(kP(3 + k^2 r^2) + (k^2 r^2 - 1)). \quad (8.104)$$

Второй член в (8.104) квадратичен по P и имеет минимум, так что

$$g(r) > 2\mu_0 \frac{dp_0}{dr} \frac{k^2 r^2}{1 + k^2 r^2} - \frac{4B_\theta^2}{r} \frac{k^2 r^2}{(1 + k^2 r^2)^2 (3 + k^2 r^2)}.$$

Условие $g(r) > 0$ сводится к

$$\frac{r\mu_0}{B_\theta^2} \frac{dp_0}{dr} > \frac{2}{(1 + k^2 r^2)(3 + k^2 r^2)} \quad (8.105)$$

(производная dp_0/dr должна быть положительна). Если равновесное решение удовлетворяет условию (8.105) вблизи центра плазмы и условию (8.102) на границе плазмы, то положительный вклад интегрального члена может превышать отрицательный вклад от границы плазмы, так что эта равновесная конфигурация может быть устойчивой.

Рассмотрим второй член в (8.104)

$$g_j = \frac{k^2 r B_\theta^2}{(1 + k^2 r^2)^2} (kP + 1)(kP(3 + k^2 r^2) + (k^2 r^2 - 1)). \quad (8.106)$$

Этот член положителен, когда

$$kP < -1 \quad \text{или} \quad kP > (1 - k^2 r^2)/(3 + k^2 r^2). \quad (8.107)$$

Точка $kP = -1$ имеет важное значение: ей соответствует «особая» точка $r = r_s$. Несколько типичных примеров $P(r)$ показаны на рис. 8.10, *a-z*; область $g_j < 0$ для данного k (< 0) на этих диа-

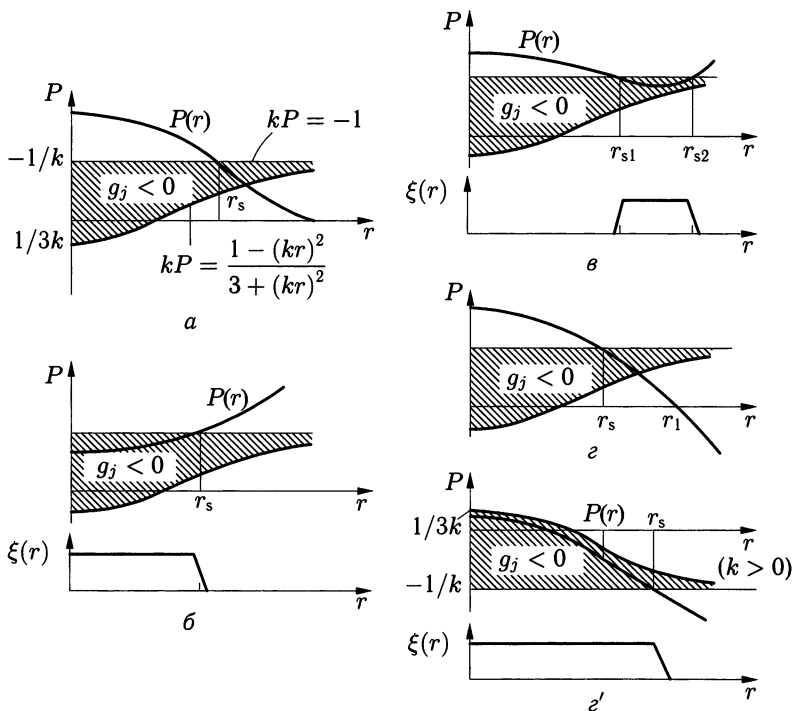


Рис. 8.10. Зависимость шага P магнитной силовой линии от r и область, где $g_j(P, r) < 0$. Также показаны смещения $\xi_r(r)$ для неустойчивых мод. Рисунки *a-z* даны для $k < 0$

граммах P, r заштрихована. r_s является особенностью. Ясно, что $\xi_r(r)$, показанное на рисунках b и v , делает W отрицательной. Пример g соответствует случаю, когда продольное магнитное поле B_z обращается в точке $r = r_1$ в нуль. Если величина k (> 0) выбрана так, что $kP(0) < 1/3$, и если $r_s < b$ (т. е. r_s не лежит на проводящей стенке $r = b$), то плазма неустойчива при смещениях $\xi_r(r)$, показанных на рис. 8.10, g' . Необходимое условие устойчивости для пинча с обращенным полем

$$-P(b) < 3P(0). \quad (8.108)$$

Это означает, что B_θ не может быть очень мало в сравнении с B_z и что величина обращенного поля B_z на стенке не может быть слишком большой.

Для $m = 1$ из выражения (8.82) для W_p следует достаточное условие устойчивости:

$$2\mu_0 j_z \frac{B_\theta}{r} < \frac{B_\theta^2}{r^2} (1 + kP)^2. \quad (8.109)$$

Наиболее опасна мода с $k = -1/P(a)$. Если предположить, что $B_\theta > 0$, то условие устойчивости принимает вид

$$\mu_0 j_z < \frac{1}{2} \frac{B_\theta}{r} \left(-\frac{P(r)}{P(a)} + 1 \right)^2. \quad (8.110)$$

Соответственно, если выполняется условие

$$\left| \frac{P(r)}{P(a)} \right| > 1 \quad (8.111)$$

при малых r , а j_z отрицательна вблизи границы, то эта конфигурация может быть устойчивой.

Рассмотрим ограничения на величину бета с точки зрения устойчивости. С этой целью исследуем наиболее опасную моду с $kP(a) = -1$, используя выражение (8.82) для W_p . Подстановка

$$\begin{aligned} \xi_r(r) &= \xi & 0 \leq r \leq a - \varepsilon, \\ \xi_r(r) &= 0 & r \geq a + \varepsilon \end{aligned}$$

в (8.82) дает

$$\begin{aligned} W_p = \frac{\pi}{2\mu_0} \xi^2 \int_0^a \frac{dr}{r} \left(-2B_\theta \frac{d}{dr} (rB_\theta) + (krB_z + mB_\theta)^2 + \right. \\ \left. + \frac{(krB_z - mB_\theta)^2}{m^2 + k^2 r^2} \right). \end{aligned}$$

Если $m = 1$, то

$$W_p = \frac{\pi}{2\mu_0} \xi^2 \int_0^a \frac{dr}{r} \left(-2B_\theta \frac{d}{dr}(rB_\theta) + 2k^2 r^2 B_z^2 + 2B_\theta^2 - \frac{k^2 r^2 (krB_z - B_\theta)^2}{1 + k^2 r^2} \right).$$

Поскольку последний член в подынтегральном выражении всегда отрицателен, то интегрирование остальных трех членов должно давать положительную величину, т. е.

$$\frac{\pi}{2\mu_0} \xi^2 \left(-B_\theta^2(a) + 2k^2 \int_0^a r B_z^2 dr \right) > 0.$$

Используя $kP(a) = -1$ и уравнение равновесия (6.9)

$$\frac{2}{a^2} \int_0^a \left(\mu_0 p_0 + \frac{B_z^2}{2} \right) r dr = \left(\mu_0 p_0 + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2} \right)_{r=a},$$

можно преобразовать необходимое условие устойчивости к виду

$$a^2 B_\theta^2(a) > 4\mu_0 \int_0^a r p_0 dr,$$

т. е.

$$\beta_\theta \equiv \left(\frac{2\mu_0}{B_\theta^2} \right) \frac{2\pi}{\pi a^2} \int p_0 r dr < 1. \quad (8.112)$$

Теперь исследуем устойчивость моды $m = 0$. Предполагается, что B_z проходит через нуль при $r = r_1$. Подстановка

$$\begin{aligned} \xi_r(r) &= \lambda r & 0 \leq r \leq r_1 - \varepsilon, \\ \xi_r(r) &= 0 & r > r_1 + \varepsilon \end{aligned}$$

в (8.82) дает

$$W_p = \frac{\pi}{2\mu_0} \lambda^2 \int_0^{r_1} r dr \left(4B_z^2 - 2B_\theta \frac{d}{dr}(rB_\theta) + k^2 r^2 B_z^2 \right).$$

Используя уравнение равновесия (6.8), получим необходимое условие устойчивости

$$\mu_0^{-1} r_1^2 B_\theta^2(r_1) > 8 \int_0^{r_1} r p_0 dr - 4r_1^2 p_0(r_1).$$

Если $p_0(r_1) \sim 0$, то получаем условие

$$\beta_\theta < \frac{1}{2}. \quad (8.113)$$

§ 8.4. Магнитогидродинамическое уравнение Хайна—Люста

Для смещения ξ

$$\xi(r, \theta, z, t) = \xi(r) \exp i(m\theta + kz - \omega t)$$

плазмы в равновесном магнитном поле \mathbf{B}_0

$$\mathbf{B}_0(r) = (0, B_\theta(r), B_z(r))$$

(r, θ, z) -компоненты магнитогидродинамического уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} -\mu_0 \rho_m \omega^2 \xi_r = & \\ = \frac{d}{dr} \left(\mu_0 \gamma p (\nabla \cdot \xi) + B^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + iD(\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta) \right) - & \\ - \left(F^2 + r \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right)^2 \right) \xi_r - 2ik \frac{B_\theta}{r} (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta), & \quad (8.114) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mu_0 \rho_m \omega^2 \xi_\theta = i \frac{m}{r} \gamma \mu_0 p (\nabla \cdot \xi) + iDB_z \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + & \\ + 2ik \frac{B_\theta B_z}{r} \xi_r - H^2 B_z (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta), & \quad (8.115) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\mu_0 \rho_m \omega^2 \xi_z = ik \gamma \mu_0 p (\nabla \cdot \xi) - iDB_\theta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) - & \\ - 2ik \frac{B_\theta^2}{r} \xi_r + H^2 B_\theta (\xi_\theta B_z - \xi_z B_\theta), & \quad (8.116) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F &= \frac{m}{r} B_\theta + k B_z = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}), \\ D &= \frac{m}{r} B_z - k B_\theta, \\ H^2 &= \left(\frac{m}{r}\right)^2 + k^2, \\ \nabla \cdot \xi &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r) + \frac{im}{r} \xi_\theta + ik\xi_z. \end{aligned}$$

Если исключить ξ_θ , ξ_z с помощью уравнений (8.115), (8.116), то найдем

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr} \left(\frac{(\mu_0 \rho_m \omega^2 - F^2)}{\Delta} (\mu_0 \rho_m \omega^2 (\gamma \mu_0 p + B^2) - \gamma \mu_0 p F^2) \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\xi_r) \right) + \\ &+ \left[\mu_0 \rho_m \omega^2 - F^2 - 2B_\theta \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right) - \frac{4k^2}{\Delta} \frac{B_\theta^2}{r^2} (\mu_0 \rho_m \omega^2 B^2 - \gamma \mu_0 p F^2) + \right. \\ &\left. + r \frac{d}{dr} \left(\frac{2kB_\theta}{\Delta r^2} \left(\frac{m}{r} B_z - kB_\theta \right) (\mu_0 \rho_m \omega^2 (\gamma \mu_0 p + B^2) - \gamma \mu_0 p F^2) \right) \right] \xi_r = \\ &= 0, \quad (8.117) \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \mu_0^2 \rho_m^2 \omega^4 - \mu_0 \rho_m \omega^2 H^2 (\gamma \mu_0 p + B^2) + \gamma \mu_0 p H^2 F^2.$$

Это уравнение было получено Хайном и Люстом [13]. Решение уравнения (8.117) дает $\xi_r(r)$ в области $0 < r < a$. В области вакуума $a < r < a_w$ (a_w — радиус стенки) имеем уравнения

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0,$$

так что

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \psi, \quad \Delta \psi = 0$$

и

$$\begin{aligned} \psi &= (bI_m(kr) + cK_m(kr)) \exp(im\theta + ikz), \\ B_{1r} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} = (bI'_m(kr) + cK'_m(kr)) \exp(im\theta + ikz) \quad (8.118) \end{aligned}$$

при фиксированных коэффициентах b , c . Величина B_{1r} в плазме дается выражением

$$B_{1r} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) \xi_r = iF \xi_r,$$

а граничные условия при $r = a$ имеют вид

$$B_{1r}(a) = iF\xi_r(a), \quad (8.119)$$

$$B'_{1r}(a) = i(F'\xi_r(a) + F\xi'_r(a)). \quad (8.120)$$

Чтобы работать с полученным уравнением как с задачей на собственные значения, следует наложить граничные условия на ξ_r : одно $\xi_r \propto r^{m-1}$, при $r = 0$, а другое — на идеально проводящей стенке: радиальная компонента возмущенного магнитного поля обращается в нуль, $B_{1r}(a_w) = 0$. После определения величины ω^2 , удовлетворяющей этим условиям, получаем [14] инкремент $\gamma^2 \equiv -\omega^2$.

§ 8.5. Баллонная неустойчивость

В перестановочной неустойчивости продольная (параллельная магнитному полю) компонента волнового вектора $k_{\parallel} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})/B$ равна нулю, и средний минимум B может стабилизировать неустойчивость. Для анализа устойчивости возмущений с $k_{\parallel} = 0$ используются критерий Сайдема и условие устойчивости

локальной моды в тороидальной системе. В этом разделе мы изучим возмущения с $k_{\parallel} \neq 0$, но с $|k_{\parallel}/k_{\perp}| \ll 1$. Хотя в конфигурации со средним минимумом B перестановочная неустойчивость стабилизируется, в области с «плохой» кривизной поля может нарастать локальное возмущение с $k_{\parallel} \neq 0$. Неустойчивость такого типа называется *баллонной модой* (см. рис. 8.11).

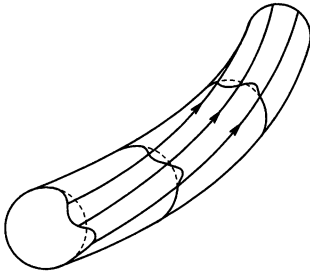


Рис. 8.11. Баллонная мода

Интеграл энергии δW дается выражением

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int \left((\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0))^2 - (\xi \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)) \cdot \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0) + \right. \\ \left. + \gamma\mu_0 p_0 (\nabla \cdot \xi)^2 + \mu_0 (\nabla \cdot \xi) (\xi \cdot \nabla p_0) \right) dr.$$

Рассмотрим случай, когда ξ можно выразить в виде

$$\xi = \frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi}{B_0^2}, \quad (8.121)$$

где ϕ рассматривается как интеграл по времени от скалярного электростатического потенциала возмущенного поля. Поскольку

$$\xi \times \mathbf{B}_0 = \nabla_{\perp} \phi,$$

то интеграл энергии сводится к

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int \left((\nabla \times \nabla_{\perp} \phi)^2 - \left(\frac{(\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi) \times \mu_0 \mathbf{j}_0}{B_0^2} \right) \nabla \times \nabla_{\perp} \phi + \right. \\ \left. + \gamma \mu_0 p_0 (\nabla \cdot \xi)^2 + \mu_0 (\nabla \cdot \xi) (\xi \cdot \nabla p_0) \right) dx.$$

Величина $\nabla \cdot \xi$ дается выражением

$$\nabla \cdot \xi = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}_0 \times \nabla \phi}{B_0^2} \right) = \nabla \phi \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}_0}{B_0^2} \right) = \\ = \nabla \phi \cdot \left(\left(\nabla \frac{1}{B^2} \right) \times \mathbf{B} + \frac{1}{B^2} \nabla \times \mathbf{B} \right).$$

Для малых бета второй член в скобках пренебрежимо мал по сравнению с первым. С учетом $\nabla p_0 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0$ величина δW представляется в форме

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int (\nabla \times \nabla_{\perp} \phi)^2 + \frac{\mu_0 \nabla p_0 \cdot (\nabla_{\perp} \phi \times \mathbf{B}_0)}{B_0^2} \left(\frac{\mathbf{B}_0 \cdot \nabla \times \nabla_{\perp} \phi}{B_0^2} \right) - \\ - \frac{\mu_0 (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{B}_0)}{B_0^2} \nabla_{\perp} \phi \cdot \nabla \times \nabla_{\perp} \phi + \gamma \mu_0 p_0 \left(\nabla \left(\frac{1}{B_0^2} \right) \cdot (\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi) \right)^2 + \\ + \frac{\mu_0 \nabla p_0 \cdot (\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi)}{B_0^2} \left(\nabla \left(\frac{1}{B_0^2} \right) \cdot (\mathbf{B}_0 \times \nabla_{\perp} \phi) \right) dx.$$

Выберем в качестве координаты z расстояние вдоль силовой линии, и пусть r — радиальная координата магнитной поверхности, а θ — полоидальный угол в направлении, перпендикулярном силовым линиям. r, θ, z -компоненты ∇p_0 , \mathbf{B} и $\nabla \phi$ приближенно даются выражениями

$$\nabla p_0 = (p'_0, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, B_{\theta}(r), B_0(1 - rR_c^{-1}(z))),$$

$$\nabla \phi = (\partial \phi / \partial r, \partial \phi / r \partial \theta, \partial \phi / \partial z), \quad \phi(r, \theta, z) = \phi(r, z) \operatorname{Re}(\exp im\theta).$$

Здесь $R_c(z)$ — радиус кривизны магнитной силовой линии,

$$\frac{1}{R_c(z)} = \frac{1}{R_0} \left(-w + \cos 2\pi \frac{z}{L} \right).$$

При $R_c(z) < 0$ кривизна, как принято говорить, является хорошей. Если конфигурация такова, что имеется средний минимум

B , то должно быть $1 > w > 0$ и $R_0 > 0$. Поскольку все величины $B_\theta/B_0, r/R_0, r/L$ малы, то

$$\begin{aligned}\nabla_\perp \phi &= \nabla \phi - \nabla_\parallel \phi \approx \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}, \frac{im}{r} \phi, 0 \right), \\ \nabla \times (\nabla_\perp \phi) &\approx \operatorname{Re} \left(\frac{-im}{r} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial r}, 0 \right), \\ \mathbf{B}_0 \times \nabla_\perp \phi &\approx \operatorname{Re} \left(\frac{-im}{r} B_0 \phi, B_0 \frac{\partial \phi}{\partial r}, 0 \right),\end{aligned}$$

и δW сводится к

$$\delta W = \frac{1}{2\mu_0} \int \frac{m^2}{r^2} \left(\left(\frac{\partial \phi(r, z)}{\partial z} \right)^2 - \frac{\beta}{r_p R_c(z)} (\phi(r, z))^2 \right) 2\pi r dr dz,$$

где $-p_0/p'_0 = r_p$ и $\beta = p_0/(B_0^2/2\mu_0)$. Второй член дает вклад в устойчивость в области $R_c(z) < 0$ и приводит к неустойчивости в области $R_c(z) > 0$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + \frac{\beta}{r_p R_c(z)} \phi = 0. \quad (8.122)$$

Величина R_c приблизительно равна $B/|\nabla B|$. Уравнение (8.122) представляет собой дифференциальное уравнение Матье с собственным значением

$$w = F(\beta L^2/2\pi^2 r_p R_0).$$

Поскольку

$$\begin{aligned}F(x) &= x/4, & x \ll 1, \\ F(x) &= 1 - x^{-1/2}, & x \gg 1,\end{aligned}$$

то приближенно

$$\beta_c \approx \frac{4w}{(1+3w)(1-w)^2} \frac{2\pi^2 r_p R_0}{L^2}.$$

Так как w порядка $r_p/2R_0$, а длина «закорачивания» равна

$$L \approx 2\pi R_0 (2\pi/\iota)$$

(ι — угол вращательного преобразования), то критическое значение бета β_c :

$$\beta_c \approx \left(\frac{\iota}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{r_p}{R} \right). \quad (8.123)$$

Если β меньше критического β_c , то $\delta W > 0$, и плазма устойчива. Условие устойчивости для баллонной моды в отсутствие шира [15]

$$\beta < \beta_c.$$

В случае конфигурации с широм магнитного поля необходим более строгий подход. Согласно [16, 17, 18], для баллонных мод с большим тороидальным числом $n \gg 1$ и с $m - nq \sim 0$ (см. Приложение В) область устойчивости на плоскости параметра шира S и меры градиента давления α имеет вид, представленный на рис. 8.12. Параметр шира S определяется как

$$S = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr},$$

где q — коэффициент запаса устойчивости ($q \equiv 2\pi/\iota$; ι — угол вращательного преобразования), а мера градиента давления α определяется как

$$\alpha = -\frac{q^2 R}{B_0^2/2\mu_0} \frac{dp}{dr}.$$

В области большого положительного шира ($S > 0,8$) имеем для максимального градиента давления примерно линейную зависимость $\alpha \sim 0,6S$ (см. рис. 8.12). Поскольку

$$\beta = \frac{1}{B_0^2/2\mu_0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p 2\pi r dr = -\frac{1}{B_0^2/2\mu_0} \frac{1}{a^2} \int_0^a \frac{dp}{dr} r^2 dr,$$

то максимальное по устойчивости относительно баллонной моды значение бета равно

$$\beta = 0,6 \frac{a}{R} \left(\frac{1}{a^3} \int_0^a \frac{1}{q^3} \frac{dq}{dr} r^3 dr \right).$$

Для оптимального профиля q максимальное бета [19]

$$\beta_{\max} \approx 0,28 \frac{a}{Rq_a} \quad (q_a > 2), \quad (8.124)$$

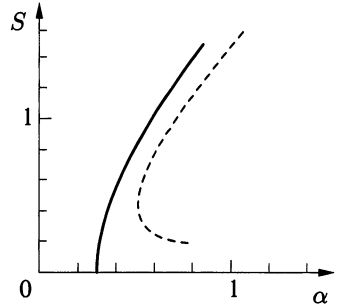


Рис. 8.12. Максимальный устойчивый градиент давления α как функция параметра шира S для баллонной моды. Пунктирная линия — граница устойчивости, полученная наложением более жесткого условия на возмущение [16]

где q_a — коэффициент запаса устойчивости на границе плазмы. При выводе (8.124) предполагалось, что $q_a > 2$, $q_0 = 1$.

Следует заметить, что в области отрицательного шира $S < 0$ баллонная мода устойчива. Отрицательность шира означает, что $q(r)$ убывает наружу и внешние магнитные силовые линии вращаются вокруг магнитной оси быстрее внутренних. С ростом давления плазма токамака стремится расшириться в направлении большого радиуса (смещение Шафранова). Это сопровождается усилением полоидального поля на внешней стороне плазмы в токамаке. В области сильного градиента давления необходимое для удержания плазмы полоидальное поле возрастает наружу, так что на внешней магнитной поверхности магнитные силовые линии вращаются быстрее, чем на внутренней, и величина шира становится более отрицательной [18].

Обычно параметр шира в токамаке положителен. Однако тот факт, что при отрицательном шире баллонная мода устойчива, очень важен для создания токамака, устойчивого относительно такой моды. Поскольку

$$\frac{r}{Rq} = \frac{B_\theta}{B_0} = \frac{1}{B_0} \frac{\mu_0}{2\pi r} \int_0^r j(r) 2\pi r dr,$$

то профиль коэффициент запаса устойчивости $q(r)$ есть

$$\frac{1}{q(r)} = \frac{R}{2B_0} \left(\frac{\mu_0}{\pi r^2} \int_0^r j 2\pi r dr \right) \equiv \frac{\mu_0 R}{2B_0} \langle j(r) \rangle_r.$$

Таким образом, конфигурация с отрицательным широм может быть реализована в случае полого профиля тока. МГД устойчивость токамака с полым профилем тока детально анализируется в [20].

§ 8.6. Моды, связанные с градиентами плотности и температуры

Рассмотрим плазму с градиентами плотности dn_0/dr и температуры dT_{e0}/dr , dT_{i0}/dr в магнитном поле, направленном вдоль оси z . Предположим, что вследствие возмущения плотность ионов становится равной $n_i = n_{i0} + \tilde{n}_i$. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla n_i + n_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i = 0$$

сводится при линеаризации к

$$-i\omega\tilde{n}_i + \tilde{v}_r \frac{\partial n_0}{\partial r} + n_0 i k_{\parallel} \tilde{v}_{\parallel} = 0. \quad (8.125)$$

Предполагается, что возмущенные величины меняются, как $\exp i(k_{\theta}r\theta + k_{\parallel}z - \omega t)$, где k_{θ} , k_{\parallel} — θ - и z -компоненты волнового вектора. Если возмущенный электростатический потенциал обозначить через $\tilde{\phi}$, то скорость $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа равна $\tilde{v}_r = E_{\theta}/B = ik_{\theta}\tilde{\phi}/B$. Поскольку плотность электронов описывается распределением Больцмана, то

$$\frac{\tilde{n}_e}{n_0} = \frac{e\tilde{\phi}}{kT_e}. \quad (8.126)$$

При линеаризации параллельная к магнитному полю компонента уравнения движения

$$n_i m_i \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\nabla_{\parallel} p_i - en \nabla_{\parallel} \phi$$

сводится к

$$-i\omega n_i m_i \tilde{v}_{\parallel} = -ik_{\parallel}(\tilde{p}_i + en_0\tilde{\phi}), \quad (8.127)$$

а уравнение адиабаты

$$\frac{\partial}{\partial t}(p_i n_i^{-5/3}) + \mathbf{v} \cdot \nabla(p_i n_i^{-5/3}) = 0$$

к

$$-i\omega \left(\frac{\tilde{p}_i}{p_i} - \frac{5}{3} \frac{\tilde{n}_i}{n_i} \right) - \frac{ik_{\theta}\tilde{\phi}}{B} \left(\frac{dT_{i0}}{dr} - \frac{2}{3} \frac{dn_0}{n_0} \right) = 0. \quad (8.128)$$

Определим электронные дрейфовые частоты ω_{ne}^* , ω_{Te}^* и ионные дрейфовые частоты ω_{ni}^* , ω_{Ti}^* как

$$\begin{aligned} \omega_{ne}^* &\equiv -\frac{k_{\theta}(\kappa T_e)}{eBn_e} \frac{dn_e}{dr}, & \omega_{ni}^* &\equiv \frac{k_{\theta}(\kappa T_i)}{eBn_i} \frac{dn_i}{dr}, \\ \omega_{Te}^* &\equiv -\frac{k_{\theta}}{eB} \frac{d(\kappa T_e)}{dr}, & \omega_{Ti}^* &\equiv \frac{k_{\theta}}{eB} \frac{d(\kappa T_i)}{dr}. \end{aligned}$$

Отношения градиентов температуры и плотности для электронов и ионов даются выражениями

$$\eta_e \equiv \frac{dT_e/dr}{T_e} \frac{n_e}{dn_e/dr} = \frac{d \ln T_e}{d \ln n_e}, \quad \eta_i \equiv \frac{dT_i/dr}{T_i} \frac{n_i}{dn_i/dr} = \frac{d \ln T_i}{d \ln n_i}$$

соответственно. Эти величины связаны:

$$\omega_{ni}^* = -\frac{T_i}{T_e} \omega_{ne}^*, \quad \omega_{Te}^* = \eta_e \omega_{ne}^*, \quad \omega_{Ti}^* = \eta_i \omega_{ni}^*.$$

Уравнения (8.125), (8.126), (8.127), (8.128) сводятся к

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{n}_i}{n_0} &= \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{\omega/k_{\parallel}} + \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} \frac{e\tilde{\phi}}{\kappa T_e}, \\ \frac{\tilde{n}_e}{n_0} &= \frac{e\tilde{\phi}}{\kappa T_e}, \\ \frac{\tilde{v}_{\parallel}}{\omega/k_{\parallel}} &= \frac{1}{m_i(\omega/k_{\parallel})^2} \left(e\tilde{\phi} + \frac{\tilde{p}_i}{n_0} \right), \\ \left(\frac{\tilde{p}_i}{p_{i0}} - \frac{5}{3} \frac{\tilde{n}_i}{n_0} \right) &= \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} \left(\eta_i - \frac{2}{3} \right) \frac{e\tilde{\phi}}{\kappa T_e}.\end{aligned}$$

Условие квазинейтральности $\tilde{n}_i/n_0 = \tilde{n}_e/n_0$ дает дисперсионное соотношение [21]:

$$1 - \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} - \left(\frac{v_{Ti}}{\omega/k_{\parallel}} \right)^2 \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{5}{3} + \frac{\omega_{ne}^*}{\omega} \left(\eta_i - \frac{2}{3} \right) \right) = 0$$

$v_{Ti}^2 = \kappa T_i/m_i$). Решение в случае $\omega \ll \omega_{ne}^*$ есть

$$\omega^2 = -k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2 \left(\eta_i - \frac{2}{3} \right).$$

Дисперсионное соотношение показывает, что этот тип возмущений неустойчив, когда $\eta_i > 2/3$. Эта неустойчивость называется градиентной η_i -модой.

Когда скорость распространения волны $|\omega/k_{\parallel}|$ становится порядка тепловой скорости ионов v_{Ti} , становится важным, как это будет показано в гл. 11, взаимодействие между ионами и волновым возмущением (затухание Ландау). В таком случае МГД рассмотрение следует модифицировать. Если же величина η_i невелика, то необходимо кинетическое рассмотрение, а порог η_i -моды становится равным $\eta_{i,cr} \sim 1,5$.

Список литературы

1. *Bateman G.* MHD instabilities. — Cambridge Mass.: The MIT Press, 1978; русский перевод: *Бейтман Г.* МГД-неустойчивости. — М.: Энергоиздат, 1982.
2. *Kruskal M., Schwarzschild M.* Proc. Roy. Soc. 1954. V. 223. P. 348.
3. *Rosenbluth M.N., Krall N.A., Rostoker N.* Nucl. Fusion Suppl. 1962. Pt. 1. P. 143.
4. *Rosenbluth M.N., Longmire C.L.* Annal. Physics. 1957. V. 1. P. 120.
5. *Berstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M.* Proc. Roy. Soc. 1958. V. A244. P. 17; русский перевод в кн. Управляемые

- термоядерные реакции. Сб. переводных материалов. Вып. 26. М.: Изд. Главного управления по использованию атомной энергии при СМ СССР. 1960. С. 226.
6. *Кадомцев Б.Б.* Вопросы теории плазмы. Вып. 2. / Под ред. *Леонтовича М.А.* — М.: Госатомиздат, 1963. С. 132.
 7. *Miyamoto K.* Plasma Physics for Nuclear Fusion. — Revised Edition. — The MIT Press, Cambridge, Mass., 1989. Chap. 9.
 8. *Kruskal M.D., Johnson J.L., Gottlieb M.B., Goldman L.M.* Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 421.
 9. *Шафранов В.Д.* ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 710.
 10. *Suydam B.R.* Proc. 2-nd U. N. International Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva. 1958. V. 31. P. 157; русский перевод в кн.: Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. Избранные доклады иностранных ученых. — Физика горячей плазмы и термоядерные реакции / Под. ред. *Калинина В.Ф.* — М.: Изд. Главного управления по использованию атомной энергии при СМ СССР. 1959. С. 89.
 11. *Newcomb W.A.* Annal. Physics. 1960. V. 10. P. 232.
 12. *Robinson D.C.* Plasma Phys. 1971. V. 13. P. 439.
 13. *Hain K., Lüst R.* Z. Naturforsch. 1958. Bd. 13a. S. 936.
 14. *Matsuoka K., Miyamoto K.* Jpn. J. Appl. Phys. 1979. V. 18. P. 817.
 15. *Kulsrud R.M.* Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Conf. Proceedings, Culham, 1965). IAEA, Vienna. 1966. V. 1, P. 127.
 16. *Connor J.W., Hastie R.J., Taylor J.B.* Phys. Rev. Lett. 1978. V. 40. P. 393.
 17. *Connor J.W., Hastie R.J., Taylor J.B.* Pro. Roy. Soc. 1979. V. A365. P. 1.
 18. *Green J.M., Chance N.S.* Nucl. Fusion. 1981. V. 21. P. 453.
 19. *Wesson J.A., Sykes A.* Nucl. Fusion 1985. V. 25. P. 85.
 20. *Ozeki T., Azumi M., Tokuda S., Ishida S.* Nucl. Fusion. 1993. V. 33. P. 1025.
 21. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* Вопросы теории плазмы. Вып. 5. / Под ред. *Леонтовича М.А.* — М.: Атомиздат, 1967. С. 209.

Глава 9

РЕЗИСТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

В предыдущей главе мы обсуждали неустойчивости плазмы с нулевым удельным сопротивлением. В этом случае магнитные силовые линии вморожены в (идеально) проводящую плазму. Однако обычно удельное сопротивление плазмы отлично от нуля, поэтому плазма может отклоняться от магнитных силовых линий. Моды, устойчивые в идеальном случае, могут оказаться неустойчивыми, если ввести конечное сопротивление.

Закон Ома имеет вид

$$\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (9.1)$$

Предположим для простоты, что \mathbf{E} равно нулю. Тогда плотность тока определяется как $\mathbf{j} = \mathbf{V} \times \mathbf{B} / \eta$, а сила Ампера $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ есть

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{V}B^2}{\eta}. \quad (9.2)$$

Если η стремится к нулю, эта сила становится бесконечно большой и препятствует отклонению плазмы от магнитных силовых линий. Но если магнитное поле \mathbf{B} мало, эта сила остается конечной даже при малой величине η , и плазма может отклоняться от магнитных силовых линий. Как будет показано ниже, на возмущение с волновым вектором \mathbf{k} в нулевом приближении действует только параллельная \mathbf{k} компонента магнитного поля \mathbf{B} . Даже при наличии шира мы можем выбрать волновой вектор \mathbf{k} перпендикулярным магнитному полю \mathbf{B} ,

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (9.3)$$

Следовательно, если есть некоторая сила \mathbf{F}_{dr} , которая заставляет возмущение двигаться, эта сила может легко превысить силу \mathbf{F}_s , которая очень мала для случая $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = 0$, и плазма станет неустойчивой. Этот тип неустойчивости называется *резистивной неустойчивостью*.

§ 9.1. Тиринг-неустойчивость

Рассмотрим модель, в которой магнитное поле в нулевом приближении \mathbf{B}_0 зависит только от x :

$$\mathbf{B}_0 = B_{0y}(x)\mathbf{e}_y + B_{0z}(x)\mathbf{e}_z. \quad (9.4)$$

Из закона Ома (9.1) находим

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times ((\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \eta \mathbf{j}) = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \Delta \mathbf{B}, \quad (9.5)$$

где η считается константой. Будем также предполагать, что плазма несжимаема. Это предположение обоснованно, т. к. инкремент резистивной неустойчивости обычно мал по сравнению с характерным инкрементом идеальной МГД моды (обратным альфвеновским переходным временем), и скорость движения меньше, чем скорость звука. Итак, считаем

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (9.6)$$

Магнитное поле \mathbf{B} всегда бездивергентно,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (9.7)$$

Уравнение движения имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_m \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \nabla p = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left((\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 - \frac{\nabla B^2}{2} \right) - \nabla p. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Рассмотрим возмущение в виде $f_1(\mathbf{r}, t) = f_1(x) \exp(i(k_y y + k_z z) + \gamma t)$. Тогда (9.5) сводится к

$$\gamma B_{1x} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) V_x + \frac{\eta}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1x}, \quad (9.9)$$

где $k^2 = k_y^2 + k_z^2$. Первый член в правой части уравнения (9.8) имеет вид $(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1$. Если взять ротор от уравнения (9.8), то получим

$$\mu_0 \rho_m \gamma \nabla \times \mathbf{V} = \nabla \times \left(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \mathbf{B}_1 + \left(B_{1x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{B}_0 \right). \quad (9.10)$$

Уравнения (9.6), (9.7) дают

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial x} + ik_y B_{1y} + ik_z B_{1z} = 0, \quad (9.11)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + ik_y V_y + ik_z V_z = 0. \quad (9.12)$$

Умножим z -компоненту уравнения (9.10) на k_y , а y -компоненту — на k_z , и вычтем их друг из друга. Используя (9.11) и (9.12), получаем

$$\mu_0 \rho_m \gamma \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) V_x = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right) B_{1x} - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' B_{1x}, \quad (9.13)$$

где штрих (') обозначает производную по x . Закон Ома и уравнение движения сводятся к уравнениям (9.9) и (9.13). Следует отметить, что магнитное поле в нулевом приближении \mathbf{B}_0 появляется только в виде $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)$. Если мы введем функцию

$$F(x) \equiv (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0), \quad (9.14)$$

то условие $F(x) = 0$ определяет место, где наиболее вероятно возникновение резистивной неустойчивости. Выберем его в качестве начала отсчета, $x = 0$ (см. рис. 9.1). Вблизи $x = 0$, $F(x)$ рав-

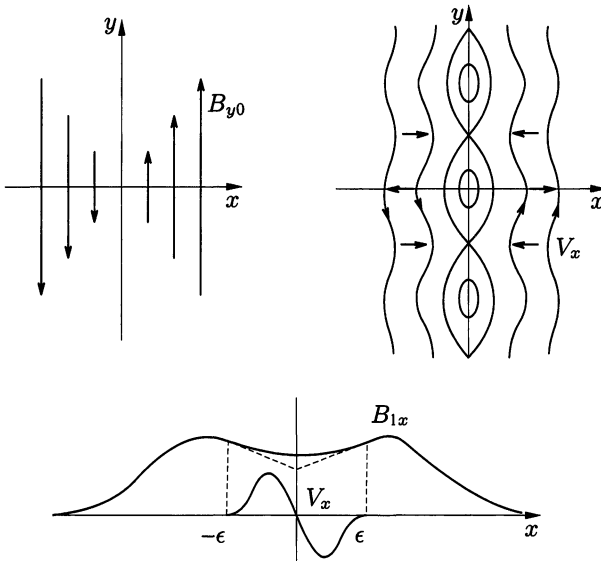


Рис. 9.1. Магнитная конфигурация в нулевом приближении и магнитные острова, обусловленные тиринг-неустойчивостью. Показаны профили B_{1x} и V_x

на $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0) \approx (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)'x$. Как следует из уравнений (9.9) и (9.13), B_{1x} — четная функция, а V_x — нечетная функция в окрестности $x = 0$. Член $|\Delta B_{1x}| \sim |\mu_0 k_y j_{1z}|$ играет роль только в области $|x| < \varepsilon$. Так как инкремент резистивной неустойчивости гораздо меньше, чем инкремент в идеальной МГД, то левой частью уравнения движения (9.13) в области $|x| > \varepsilon$ можно пренебречь, тогда мы имеем

$$\frac{d^2 B_{1x}}{dx^2} - k^2 B_{1x} = \frac{F''}{F} B_{1x}, \quad |x| > \varepsilon. \quad (9.15)$$

Решение в области $x > 0$ выглядит так:

$$B_{1x} = e^{-kx} \left(\int_{-\infty}^x e^{2k\xi} d\xi \int_{\infty}^{\xi} (F''/F) B_{1x} e^{-k\eta} d\eta + A \right),$$

а решение в области $x < 0$

$$B_{1x} = e^{kx} \left(\int_{\infty}^x e^{-2k\xi} d\xi \int_{\infty}^{\xi} (F''/F) B_{1x} e^{k\eta} d\eta + B \right).$$

Определим Δ' следующим образом:

$$\Delta' = \frac{B'_{1x}(+\varepsilon) - B'_{1x}(-\varepsilon)}{B_{1x}(0)}. \quad (9.16)$$

Здесь $B'_{1x}(+\varepsilon)$ и $B'_{1x}(-\varepsilon)$ означают, что B'_{1x} берется при $x = +\varepsilon$ и при $x = -\varepsilon$ соответственно. Тогда значение Δ' , полученное из решения в области $|x| > \varepsilon$, запишется в виде

$$\Delta' = -2k - \frac{1}{B_{1x}(0)} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \exp(-k|x|) (F''/F) B_{1x} dx. \quad (9.17)$$

Для пробной функции

$$\begin{aligned} F(x) &= F_s x / L_s \quad (|x| < L_s), \\ F(x) &= F_s x / |x| \quad (x > |L_s|) \end{aligned}$$

можно решить уравнение (9.15) и найти выражение для Δ' :

$$\Delta' = \left(\frac{2\alpha}{L_s} \right) \frac{e^{-2\alpha} + (1 - 2\alpha)}{e^{-2\alpha} - (1 - 2\alpha)} \approx \frac{2}{L_s} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right).$$

Здесь $\alpha \equiv kL_s$, а L_s — так называемая *шировая длина*, определяемая как $L_s = (F/F')_{x=0}$. Для функций $F(x)$ более общего

вида зависимость $B_{1x}(x)$ имеет логарифмическую сингулярность при $x = 0$, т. к. обычно $F''/F \propto 1/x$. В работе [2] описан метод, позволяющий избежать подобных трудностей.

Уравнения (9.9) и (9.13) в области $|x| < \varepsilon$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial x^2} - \left(k^2 + \frac{\gamma\mu_0}{\eta}\right) B_{1x} = -i\frac{\mu_0}{\eta} F' x V_x, \quad (9.18)$$

$$\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} - \left(k^2 + \frac{(F')^2}{\rho_m \eta \gamma} x^2\right) V_x = i \left(F' x \frac{1}{\rho_m \eta} - \frac{F''}{\mu_0 \rho_m \gamma} \right) B_{1x}. \quad (9.19)$$

Значение Δ' , получаемое из решения (9.18) в области $|x| < \varepsilon$:

$$\begin{aligned} \Delta' \times B_{1x}(0) &= \frac{\partial B_{1x}(+\varepsilon)}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}(-\varepsilon)}{\partial x} = \\ &= \frac{\mu_0}{\eta} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\left(\gamma + \frac{\eta}{\mu_0} k^2 \right) B_{1x} - i F' x V_x \right) dx. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Величина Δ' в (9.20) должна совпасть с выражением (9.17). Это требование дает собственное значение γ — инкремент резистивной неустойчивости [1]. Однако в этом разделе мы постараемся получить величину инкремента качественно. В области $|x| < \varepsilon$ можно написать

$$\frac{\partial^2 B_{1x}}{\partial x^2} \sim \frac{\Delta' B_{1x}}{\varepsilon}.$$

Будем предполагать, что все три члена уравнения (9.9), а именно, индуцированное электрическое поле (левая часть), член $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ (первое слагаемое в правой части) и член, обусловленный конечной проводимостью (второе слагаемое), одного порядка:

$$\gamma B_{1x} \sim \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\Delta' B_{1x}}{\varepsilon}, \quad (9.21)$$

$$\gamma B_{1x} \sim i F' \varepsilon V_x. \quad (9.22)$$

Тогда уравнение (9.21) дает

$$\gamma \sim \frac{\eta}{\mu_0} \frac{\Delta'}{\varepsilon}. \quad (9.23)$$

Соответственно,

$$\Delta' > 0 \quad (9.24)$$

— условие неустойчивости. Чтобы найти значение γ , необходимо оценить ε . Уравнение (9.13) сводится к

$$\mu_0 \rho_m \gamma \left(\frac{-V_x}{\varepsilon^2} \right) \sim i F' \varepsilon \frac{\Delta' B_{1x}}{\varepsilon}. \quad (9.25)$$

Если исключить величины V_x, B_{1x}, γ с помощью уравнений (9.21), (9.22) и (9.25), получим

$$\varepsilon^5 \sim \left(\frac{\eta}{\mu_0 a^2} \right)^2 (\Delta' a) \frac{\rho_m \mu_0}{(F' a)^2} a^5,$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{a} &\sim \left(\left(\frac{\tau_A}{\tau_R} \right)^2 (\Delta' a) \left(\frac{B_0}{F' a^2} \right)^2 \right)^{1/5} \sim \\ &\sim S^{-2/5} (\Delta' a)^{1/5} \left(\frac{B_0}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2} \right)^{2/5}, \end{aligned} \quad (9.26)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \tau_R &= \frac{\mu_0 a^2}{\eta}, \\ \tau_A &= \frac{a}{B_0 / (\mu_0 \rho_m)^{1/2}} \end{aligned}$$

— время резистивной диффузии и альфвеновское переходное время соответственно. Безразмерный фактор

$$S = \tau_R / \tau_A$$

— это *магнитное число Рейнольдса*, а a — характерный размер плазмы. Таким образом, инкремент γ дается выражением

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\eta}{\mu_0 a^2} \frac{a}{\varepsilon} (\Delta' a) = \frac{(\Delta' a)^{4/5}}{\tau_R^{3/5} \tau_A^{2/5}} \left(\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2}{B_0} \right)^{2/5} = \\ &= \frac{(\Delta' a)^{4/5}}{S^{3/5}} \left(\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' a^2}{B_0} \right)^{2/5} \frac{1}{\tau_A}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Так как рассматриваемая мода разбивает плазму на ряд магнитных островов, как показано на рис. 9.1, то ее называют *тиринг-неустойчивостью* [1].

Преыдушее обсуждение базировалось на модели плоского слоя. Рассмотрим эту моду в тороидальной плазме. Полоидальная и тороидальная компоненты волнового вектора \mathbf{k} равны m/r и $-n/R$ соответственно. Можно установить соответствия $k_y \leftrightarrow m/r$ и $k_z \leftrightarrow -n/R$, при этом

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) = \frac{m}{r} B_\theta - \frac{n}{R} B_z = \frac{n}{r} B_\theta \left(\frac{m}{n} - q \right), \quad q \equiv \frac{r B_z}{R B_\theta}.$$

«Слабые места» для появления тиринг-неустойчивости отвечают условию $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0) = 0$ — это резонансные рациональные поперечно-

сти, на которых $q(r_s) = m/n$. Дифференцируя, получаем вследствие наличия шира

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' = \frac{-n}{r} B_\theta \frac{dq}{dr}, \quad \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)' r_s^2}{B_0} = -n \left(\frac{r_s}{R} \right) \frac{q' r_s}{q}.$$

Тиринг-мода тесно связана с внутренними срывами в токамаке и, как отмечено в разд. 16.3, играет важную роль.

До сих пор мы предполагали, что удельная проводимость η и массовая плотность ρ_m однородны, а гравитации нет (ускорение свободного падения $\mathbf{g} = 0$). Если η зависит от x , резистивный член в уравнении (9.5) имеет вид $\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$. Когда есть градиент температуры ($\eta' \neq 0$), в той стороне от $x = 0$, где удельное сопротивление меньше (температура выше), может возникнуть волновая мода с короткой длиной волны ($kL_s \gg 1$). При учете гравитации к уравнению движения (9.8) добавляется член $\rho \mathbf{g}$. Если направление \mathbf{g} противоположно $\nabla \rho_m$ (\mathbf{g} направлено в сторону низкой плотности), может возникнуть гравитационная перестановочная мода [1].

§ 9.2. Резистивная дрейфовая неустойчивость

На границе плазмы всегда существуют конечные градиенты плотности и температуры, что в определенных условиях может приводить к неустойчивости. Рассмотрим вновь модель плоского

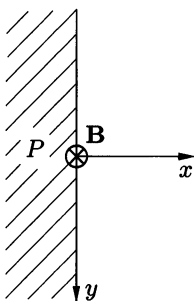


Рис. 9.2. Резистивная дрейфовая волна в модели плоского слоя

слоя. Пусть однородное магнитное поле направлено по оси z : $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$. Выберем ось x вдоль вектора градиента плотности, направив ее из плазмы. Давление также есть функция от x , $p_0 = p_0(x)$ (см. рис. 9.2). В нулевом приближении плотность тока в плазме $\mathbf{j}_0 = (0, p_0'/B_0, 0)$. Кроме того, предполагаем, что потоковая (массовая) скорость и электрическое поле в нулевом приближении равны нулю: $\mathbf{V}_0 = 0$, $\mathbf{E}_0 = 0$. Мы пренебрегаем здесь потоковой скоростью, связанной с классической диффузией, а также инерцией электронов и движением ионов вдоль магнитных силовых линий. Используем обычные уравнения:

$$Mn \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (9.28)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_0), \quad (9.29)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{V}) = 0, \quad (9.30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (9.31)$$

где M — масса иона. Рассмотрим электростатические возмущения в такой конфигурации. Поправка первого порядка \mathbf{E}_1 к электрическому полю выражается электростатическим потенциалом $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1$, а возмущение магнитного поля в этом приближении отсутствует $\mathbf{B}_1 = 0$ ($\partial B/\partial t = \nabla \times \mathbf{E}$). Характеристики электростатического возмущения будут детально объяснены в гл. 10. Для простоты предположим, что температура ионов равна нулю ($T_i = 0$), и рассмотрим моду

$$n_1 = n_1(x) \exp i(ky + k_{\parallel}z - \omega t),$$

$$\phi_1 = \phi_1(x) \exp i(ky + k_{\parallel}z - \omega t).$$

Уравнения (9.28), (9.29) сводятся к

$$-i\omega M n_0 \mathbf{V}_1 = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 - \kappa T_e \nabla n_1, \quad (9.32)$$

$$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{B}_0 - \kappa T_e \nabla n_1 = en_0(-\nabla\phi_1 + \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0 - \eta \mathbf{j}_1). \quad (9.33)$$

Уравнения (9.32), (9.33) дают

$$i\omega \left(\frac{M}{e} \right) \mathbf{V}_1 = \nabla\phi_1 - \mathbf{V}_1 \times \mathbf{B}_0 + \eta \mathbf{j}_1. \quad (9.34)$$

Когда η мало ($\nu_{ei} \ll \Omega_e$), членом $\eta \mathbf{j}$ в (9.34) можно пренебречь, т. е. можно написать

$$V_x = -ik \frac{\phi_1}{B_0}, \quad V_y = \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right) \frac{k\phi_1}{B_0}, \quad V_z = \left(-\frac{\Omega_i}{\omega} \right) \frac{k_{\parallel}\phi_1}{B_0}.$$

Ω_i — как обычно, ионная циклотронная частота ($\Omega_i = -ZeB/M$). Частота возмущения ω предполагается низкой ($\omega/\Omega_i)^2 \ll 1$, тогда x - и y -компоненты уравнения (9.32) и z -компонента уравнения (9.33) дают

$$\begin{aligned} j_x &= -ik \frac{\kappa T_e n_1}{B_0}, \\ j_y &= \frac{\partial n_1}{\partial x} \frac{\kappa T_e}{B_0} + kn_0 \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right) \frac{e\phi_1}{B_0}, \\ j_z &= \frac{ik_{\parallel}}{e\eta} \left(\kappa T_e \frac{n_1}{n_0} - e\phi_1 \right). \end{aligned}$$

Так как уравнение (9.31) сводится к $j'_x + ikj_y + ik_{\parallel}j_z = 0$, а уравнение (9.30) к $-i\omega n_1 + n'_0 V_x + n_0 ik V_y + n_0 ik_{\parallel} V_z = 0$, то имеем

$$\frac{k_{\parallel}^2 \kappa T_e n_1}{e\eta n_0} + \left(-\frac{k_{\parallel}^2 B}{\eta} - ik^2 e n_0 \frac{\omega}{\Omega_i} \right) \frac{\phi_1}{B_0} = 0, \quad (9.35)$$

$$\frac{n_1}{n_0} + \left(\frac{-k^2}{\Omega_i} + \frac{k_{\parallel}^2 \Omega_i}{\omega^2} + \frac{n'_0 k}{n_0 \omega} \right) \frac{\phi_1}{B_0} = 0. \quad (9.36)$$

Дисперсионное уравнение получится, если определитель системы уравнений (9.35), (9.36) приравнять нулю:

$$\left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 - i \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right) \left(\frac{k_{\parallel}}{k} \right)^2 \frac{B_0}{n_0 e \eta} \left(1 - \frac{\kappa T_e k^2}{e B_0 \Omega_i} - \frac{\kappa T_e k_{\parallel}^2}{M \omega^2} \right) - i \left(\frac{k_{\parallel}}{k} \right)^2 \frac{B_0 \kappa T_e k n'_0}{n_0 e \eta e B_0 \Omega_i n_0} = 0, \quad (9.37)$$

где $\eta = m_e \nu_{ei} / ne^2$, $B_0 / (n_0 e \eta) = \Omega_e / \nu_{ei}$. Дрейфовые скорости \mathbf{v}_{di} , \mathbf{v}_{de} ионов и электронов, связанные с градиентом плотности ∇n_0 , даются выражениями

$$\mathbf{v}_{di} = \frac{-(\kappa T_i \nabla n_0 / n_0) \times \mathbf{b}}{e B_0} = \frac{-\kappa T_i}{e B_0} \left(\frac{-n'_0}{n_0} \right) \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{v}_{de} = \frac{(\kappa T_e \nabla n_0 / n_0) \times \mathbf{b}}{e B_0} = \frac{\kappa T_e}{e B_0} \left(\frac{-n'_0}{n_0} \right) \mathbf{e}_y.$$

Дрейфовые частоты ионов и электронов определяются как $\omega_i^* \equiv \equiv k v_{di}$ и $\omega_e^* \equiv k v_{de}$ соответственно. Так как $n'_0 / n_0 < 0$, то $\omega_e^* > > 0$, а $\omega_i^* = -(T_i / T_e) \omega_e^* < 0$. Вводя $\omega_e^* = k (-n'_0 / n_0) (\kappa T_e / m \Omega_e)$, дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$\left(\frac{\omega}{\omega_e^*} \right)^2 - i \left(1 + (k \rho_{\Omega})^2 - \frac{\kappa T_e k_{\parallel}^2}{M \omega^2} \right) \frac{\Omega_e \Omega_i}{\nu_{ei} \omega_e^*} \left(\frac{k_{\parallel}}{k} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_e^*} \right) + i \frac{\Omega_e \Omega_i}{\nu_{ei} \omega_e^*} \left(\frac{k_{\parallel}}{k} \right)^2 = 0. \quad (9.38)$$

Здесь ρ_{Ω} — ларморовский радиус ионов в предположении, что электронная и ионная температуры равны T_e . Обозначим $\omega / \omega_e^* = x + iz$, а $(\Omega_e \Omega_i / \nu_{ei} \omega_e^*) (k_{\parallel} / k)^2 = y^2$ и предположим, что $(k \rho_{\Omega})^2 - (\kappa T_e / M) (k_{\parallel}^2 / \omega^2) \ll 1$. Тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$(x + iz)^2 + iy^2(x + iz) - iy^2 = 0. \quad (9.39)$$

Зависимость двух решений $x_1(y)$, $z_1(y)$ и $x_2(y)$, $z_2(y)$ от $y \propto (k_{\parallel}/k)$ показана на рис. 9.3. Так как $z_2(y) < 0$, то мода, соответствующая $x_2(y)$, $z_2(y)$ устойчива. Эта волна распространяется в направлении дрейфа ионов.

Волна, соответствующая решению $x_1, z_1 > 0$, распространяется в направлении дрейфа электронов, и она неустойчива. Если значение (k_{\parallel}/k) таково, что $y \approx 1,3$, значение z_1 достигает максимума $z_1 \approx 0,25$, а инкремент $\text{Im } \omega \approx 0,25 \omega_e^*$. Если η мало, длины волн большинства неустойчивых мод увеличиваются.

При этом поддерживается частота столкновений, необходимая для того, чтобы прервать движение электрона вдоль магнитной силовой линии. Если нижний предел k_{\parallel} тем или иным методом зафиксирован, то

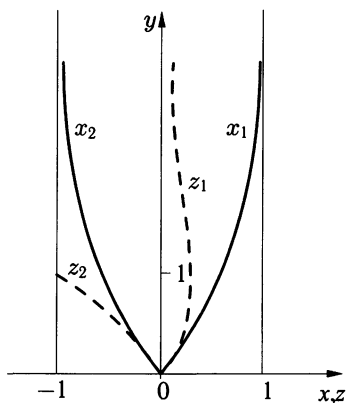


Рис. 9.3. Зависимость $\omega/\omega_e^* = x + iz$ от $y \propto k_{\parallel}/k$ для резистивной дрейфовой неустойчивости

$$\text{Im}(\omega/\omega_e^*) \approx y^{-2} = \frac{\nu_{ei}\omega_e^*}{\Omega_e|\Omega_i|} \left(\frac{k}{k_{\parallel}} \right)^2,$$

т. е. инкремент пропорционален $\eta \propto \nu_{ei}$. Эта неустойчивость называется *резистивной* или *диссипативной дрейфовой неустойчивостью*.

Когда инерцией ионов можно пренебречь, уравнение (9.35) сводится к $n_1/n_0 = e\phi/\kappa T_e$, а дисперсионное уравнение преобразуется в $\omega^2 - \omega k v_{de} - k_{\parallel}^2 T_e/M = 0$. Неустойчивость в этом случае не возникает; она появляется лишь при разделении зарядов (электронов и ионов) за счет инерции ионов. Разделение зарядов нейтрализуется движением электронов вдоль магнитных силовых линий. Однако если параллельное движение электронов прерывается столкновениями, т. е. сопротивлением, разделение зарядов растет и волна становится неустойчивой [3, 4]. Поэтому данную неустойчивость также называют *столкновительной дрейфовой неустойчивостью*.

Механизм разделения заряда между ионами и электронами можно легко понять, если использовать уравнения движения для ионной и электронной компонент, которые имеют вид

$$0 = -ikn_1\kappa T_e + ik\phi_1 en_0 - en_0(\mathbf{V}_e \times \mathbf{B}) - 2n_0 m_e \nu_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)_{\parallel}, \quad (9.40)$$

$$M \frac{n_0}{2} (-i\omega) \mathbf{V}_i = -ikn_1 \frac{\kappa T_i}{Z} - ik\phi_1 en_0 + en_0 (\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) + n_0 m_e \nu_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i)_{\parallel}. \quad (9.41)$$

Из этих уравнений находим

$$\mathbf{V}_{e\perp} = \frac{-ik\kappa T_e}{eB} (\mathbf{b} \times \mathbf{k}) \left(\frac{n_1}{n_0} - \frac{e\phi_1}{\kappa T_e} \right), \quad (9.42)$$

$$\mathbf{V}_{e\parallel} = \frac{-ik_{\parallel} \kappa T_e}{m_e \nu_{ei}} \left(\frac{n_1}{n_0} - \frac{e\phi_1}{\kappa T_e} \right), \quad (9.43)$$

$$\mathbf{V}_{i\perp} = \frac{i\kappa T_i}{ZeB} (\mathbf{b} \times \mathbf{k}) \left(\frac{n_1}{n_0} + \frac{Ze\phi_1}{\kappa T_i} \right) + \left(\frac{-M}{BZe} \right) (i\omega) (\mathbf{b} \times \mathbf{V}_{i\perp}), \quad (9.44)$$

$$\mathbf{V}_{i\parallel} = \frac{k_{\parallel} Z c_s^2 n_1}{\omega n_0}. \quad (9.45)$$

Здесь предполагается, что $|\mathbf{V}_{e\parallel}| \gg |\mathbf{V}_{i\parallel}|$, и используется обозначение $c_s \equiv \kappa T_e / M$. Уравнение непрерывности $\partial n / \partial t + \nabla \times (\mathbf{nV}) = 0$ для ионов и электронов дает

$$-i\omega n_1 + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{b} \times i\mathbf{k}}{B} n_0 \phi_1 \right) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) (n_0 V_{e\parallel}) = 0,$$

$$\begin{aligned} & -i\omega n_1 + \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{b} \times i\mathbf{k}}{B} n_0 \phi_1 \right) + \\ & + \frac{M(-i\omega)}{ZeB} \frac{k^2 \kappa T_i}{ZeB} \left(\frac{n_1}{n_0} + \frac{Ze\phi_1}{\kappa T_i} \right) n_0 + \frac{ik_{\parallel}^2 c_s^2}{\omega} Z n_1 = 0. \end{aligned}$$

Из уравнений для электронов следует, что

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{\omega_e^* + ik_{\parallel}^2 \kappa T_e / (m_e \nu_{ei})}{\omega + ik_{\parallel}^2 \kappa T_e / (m_e \nu_{ei})} \left(\frac{e\phi_1}{\kappa T_e} \right), \quad (9.46)$$

а из уравнений для ионов следует, что

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{\omega_i^* + b\omega}{\omega(1+b) - k_{\parallel}^2 c_s^2 Z / \omega} \left(\frac{-Ze\phi_1}{\kappa T_i} \right), \quad (9.47)$$

где $b = k^2 (\rho_{\Omega})^2$. Условие электронейтральности дает дисперсионное уравнение, которое эквивалентно (9.38),

$$\frac{\omega_e^* + ik_{\parallel}^2 \kappa T_e / (m_e \nu_{ei})}{\omega + ik_{\parallel}^2 \kappa T_e / (m_e \nu_{ei})} = \frac{\omega_e^* - (ZT_e / T_i) b \omega}{\omega(1+b) - k_{\parallel}^2 c_s^2 Z / \omega}. \quad (9.48)$$

Движение ионов, перпендикулярное магнитному полю, кроме x -компоненты содержит y -компоненту (второе слагаемое в правой части уравнения (9.44)), связанную с инерцией ионов.

В бесстолкновительном случае (9.38) принимает вид

$$(1 + (k\rho\Omega)^2)\omega^2 - \omega_e^*\omega - c_s^2 k_{\parallel}^2 = 0. \quad (9.49)$$

В бесстолкновительной МГД неустойчивость не возникает. Однако даже в отсутствие столкновений неустойчивость может появиться в рамках кинетической теории (см. Приложение С). Эта неустойчивость называется *бесстолкновительной дрейфовой неустойчивостью*.

Список литературы

1. Furth H.P., Killeen J. Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 459.
2. Furth H.P., Rutherford P.H., Selberg H. Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1054; Pletzer A., Dewar R.L. J. Plasma Phys. 1991. V. 45. P. 427.
3. Мусеев С.С., Сагдеев Р.З. ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 763; ЖТФ. 1964. Т. 34. С. 248.
4. Chen F.F. Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 912; P. 1323.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Плазма — это ансамбль огромного количества движущихся ионов и электронов, взаимодействующих друг с другом. Для описания поведения такого ансамбля в гл. 4 была введена функция распределения; были выведены также уравнения Больцмана и Власова для функции распределения. Ансамбль большого числа частиц имеет много степеней свободы, и математическое описание поведения плазмы возможно только для упрощенных аналитических моделей.

В гл. 5 были введены статистические средние по пространству скоростей, такие как массовая плотность, гидродинамическая скорость, давление и т. д., и выведены магнитогидродинамические уравнения для этих средних. Таким образом, мы получили математическое описание магнитогидродинамической (жидкостной) модели; кроме того, в гл. 6–9 мы рассмотрели условия равновесия, задачи устойчивости и т. д. в рамках этой модели. Так как жидкостная модель оперирует только со средними по пространству скоростей величинами, она не способна описать те неустойчивости или явления затухания, в которых существенную роль играет форма функции распределения. Явления, которые можно трактовать при помощи жидкостной модели, — низкочастотные (частота меньше, чем ионная или электронная циклотронная частота); высокочастотные явления невозможно описать в ее рамках.

В этой главе мы сосредоточимся на модели, которая позволит нам изучать волновые явления, удержав существенные черты плазменной динамики и в то же время сохранив относительную простоту математической формы. Такую модель представляет собой однородная плазма, состоящая из ионов и электронов при нулевой температуре в постоянном магнитном поле. В невозмущенном состоянии как ионы, так и электроны плазмы неподвижны. Любое малое отклонение от невозмущенного состояния приводит к возникновению электрического поля и зависящей от времени компоненты магнитного поля и, следовательно, вызывает движение ионов и электронов. Движение заряженных частиц индуцирует электрическое и магнитное поля, которые, в свою очередь, должны быть согласованы с ранее наложенными малыми возмущениями. Это называется кинетической моделью *холодной плазмы*. В этой главе мы воспользуемся ею для вывода дисперсионного соотношения, характеризующего волновые явления в холодной плазме.

Хотя эта модель и предполагает однородность магнитного поля и плотности, а также нулевую температуру, она применима и для неоднородной теплой плазмы, если характерная длина изменения магнитного поля и плотности гораздо больше, чем длина волны, а фазовая скорость волны гораздо больше тепловой скорости частиц.

Плазму можно рассматривать как среду распространения электромагнитных волн, обладающую тензором диэлектрической проницаемости \mathbf{K} . Тензор диэлектрической проницаемости \mathbf{K} является функцией магнитного поля и плотности, которые могут изменяться в пространстве. Плазма, вообще говоря, представляет собой неоднородную, анизотропную и диспергирующую среду.

Когда температура плазмы конечна и тепловая скорость частиц сравнима с фазовой скоростью бегущей волны, становится важным взаимодействие частиц с волной. Типичный пример такого взаимодействия — затухание Ландау, которое рассматривается в гл. 11. Общий математический анализ волн в горячей плазме будет проведен в гл. 12 и Приложении С. В книгах [1–4] волны в плазме описаны более подробно.

§ 10.1. Дисперсионное уравнение волн в холодной плазме

В невозмущенной холодной плазме как плотность частиц n , так и магнитное поле \mathbf{B}_0 однородны в пространстве и постоянны во времени. Ионы и электроны неподвижны.

Предположим, что наложено возмущение первого порядка вида $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. Из-за возмущения электрического поля \mathbf{E} и индуцированного магнитного поля \mathbf{B}_1 ионы и электроны приходят в движение. Обозначим через \mathbf{v}_k скорость частиц сорта k (электронов либо ионов различных сортов). Ток \mathbf{j} , возникший вследствие движения частиц, дается выражением

$$\mathbf{j} = \sum_k n_k q_k \mathbf{v}_k. \quad (10.1)$$

Здесь n_k и q_k — плотность и заряд частиц сорта k , соответственно. Электрическая индукция \mathbf{D} равна

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (10.2)$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = -i\omega \mathbf{P}, \quad (10.3)$$

где \mathbf{E} — напряженность электрического поля, \mathbf{P} — электрическая поляризация, а ϵ_0 — диэлектрическая постоянная. Можно записать \mathbf{D} как

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{i}{\omega} \mathbf{j} \equiv \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}. \quad (10.4)$$

\mathbf{K} называют диэлектрическим тензором или, точнее, *тензором диэлектрической проницаемости*.

Уравнение движения отдельной частицы сорта k имеет вид

$$m_k \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = q_k (\mathbf{E} + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}). \quad (10.5)$$

Здесь \mathbf{B} представляет собой сумму $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, а \mathbf{v}_k , \mathbf{E} , \mathbf{B}_1 — величины первого порядка малости. Уравнение, линеаризованное по этим величинам, записывается в виде

$$-i\omega m_k \mathbf{v}_k = q_k (\mathbf{E} + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_0). \quad (10.6)$$

Если ось z выбрана вдоль направления \mathbf{B}_0 , решение дается выражениями

$$\left. \begin{aligned} v_{k,x} &= \frac{-iE_x}{B_0} \frac{\Omega_k \omega}{\omega^2 - \Omega_k^2} - \frac{E_y}{B_0} \frac{\Omega_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \\ v_{k,y} &= \frac{E_x}{B_0} \frac{\Omega_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2} - \frac{iE_y}{B_0} \frac{\Omega_k \omega}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \\ v_{k,z} &= \frac{-iE_z}{B_0} \frac{\Omega_k}{\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

где Ω_k — циклотронная частота заряженных частиц сорта k :

$$\Omega_k = \frac{-q_k B_0}{m_k} \quad (10.8)$$

($\Omega_e > 0$ для электронов и $\Omega_i < 0$ для ионов). Компоненты \mathbf{v}_k представляют собой линейные функции \mathbf{E} , определяемые (10.7); \mathbf{j} в (10.1) и электрическая индукция \mathbf{D} в (10.4) также являются линейными функциями \mathbf{E} , так что *тензор диэлектрической проницаемости* дается выражением

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = \begin{bmatrix} K_{\perp} & -iK_{\times} & 0 \\ iK_{\times} & K_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad (10.9)$$

где

$$K_{\perp} \equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \quad (10.10)$$

$$K_{\times} \equiv - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2 - \Omega_k^2} \frac{\Omega_k}{\omega}, \quad (10.11)$$

$$K_{\parallel} \equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2}, \quad (10.12)$$

$$\Pi_k^2 \equiv \frac{n_k q_k^2}{\epsilon_0 m_k}. \quad (10.13)$$

Вводятся также (в обозначениях Стикса) величины

$$\left. \begin{aligned} R &\equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega - \Omega_k} = K_{\perp} + K_{\times}, \\ L &\equiv 1 - \sum_k \frac{\Pi_k^2}{\omega^2} \frac{\omega}{\omega + \Omega_k} = K_{\perp} - K_{\times}. \end{aligned} \right\} \quad (10.14)$$

Из уравнений Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (10.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (10.16)$$

следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B}_1, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H}_1 &= -\omega \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (10.17)$$

Определим безразмерный вектор

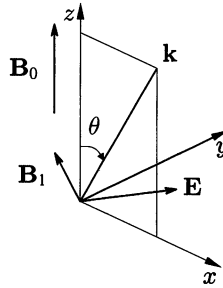
$$\mathbf{N} \equiv \frac{\mathbf{k}c}{\omega}$$

(c — скорость света в вакууме). Абсолютное значение $N = |\mathbf{N}|$ представляет собой отношение скорости света к фазовой скорости волны, т. е. N — это показатель преломления. Используя \mathbf{N} , мы можем записать (10.17) в виде

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (10.18)$$

Если угол между \mathbf{N} и \mathbf{B}_0 обозначен как θ (рис. 10.1), а ось x выбрана таким образом, что \mathbf{N} лежит в плоскости z, x , то (10.18) можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} K_{\perp} - N^2 \cos^2 \theta & -iK_{\times} & N^2 \sin \theta \cos \theta \\ iK_{\times} & K_{\perp} - N^2 & 0 \\ N^2 \sin \theta \cos \theta & 0 & K_{\parallel} - N^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0. \quad (10.19)$$

Рис. 10.1. Волновой вектор \mathbf{k} и координаты x, y, z

Для существования нетривиального решения детерминант матрицы должен быть равен нулю, т. е.

$$AN^4 - BN^2 + C = 0, \quad (10.20)$$

$$A = K_{\perp}^2 \sin^2 \theta + K_{\parallel} \cos^2 \theta, \quad (10.21)$$

$$B = (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) \sin^2 \theta + K_{\parallel} K_{\perp} (1 + \cos^2 \theta), \quad (10.22)$$

$$C = K_{\parallel} (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) = K_{\parallel} RL. \quad (10.23)$$

Уравнение (10.20) определяет соотношение между волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω и называется *дисперсионным уравнением*. Решение (10.20) выглядит так:

$$\begin{aligned} N^2 = \frac{B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A} = \\ = \left((K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) \sin^2 \theta + K_{\parallel} K_{\perp} (1 + \cos^2 \theta) \pm \right. \\ \left. \pm [(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 - K_{\parallel} K_{\perp})^2 \sin^4 \theta + 4K_{\parallel}^2 K_{\times}^2 \cos^2 \theta]^{1/2} \right) \times \\ \times (2(K_{\perp} \sin^2 \theta + K_{\parallel} \cos^2 \theta))^{-1}. \quad (10.24) \end{aligned}$$

Когда волна распространяется вдоль силовых линий магнитного поля ($\theta = 0$), дисперсионное уравнение (10.20) принимает вид

$$K_{\parallel} (N^4 - 2K_{\perp} N^2 + (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2)) = 0 \quad (10.25)$$

и имеет следующие решения:

$$K_{\parallel} = 0, \quad N^2 = K_{\perp} + K_{\times} = R, \quad N^2 = K_{\perp} - K_{\times} = L. \quad (10.26)$$

Для волны, распространяющейся перпендикулярно к магнитному полю ($\theta = \pi/2$), дисперсионное уравнение и его решения даются выражениями

$$K_{\perp} N^4 - (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 + K_{\parallel} K_{\perp}) N^2 + K_{\parallel} (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2) = 0, \quad (10.27)$$

$$N^2 = \frac{K_{\perp}^2 - K_{\times}^2}{K_{\perp}} = \frac{RL}{K_{\perp}}, \quad N^2 = K_{\parallel}. \quad (10.28)$$

§ 10.2. Свойства волн

10.2а. Поляризация и движение частиц

В предыдущем разделе было получено дисперсионное соотношение для волн в холодной плазме. Здесь мы рассмотрим электрическое поле волн и возникающее движение частиц. Компонента y уравнения (10.19) дает

$$\begin{aligned} iK_{\times}E_x + (K_{\perp} - N^2)E_y &= 0, \\ \frac{iE_x}{E_y} &= \frac{N^2 - K_{\perp}}{K_{\times}}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Соотношение между компонентами скорости частицы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{iv_{k,x}}{v_{k,y}} &= \frac{i\left(\frac{-iE_x}{E_y} \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_k^2} - \frac{\Omega_k}{\omega^2 - \Omega_k^2}\right)}{\frac{E_x}{E_y} \frac{\Omega_k}{\omega^2 - \Omega_k^2} - i \frac{\omega}{\omega^2 - \Omega_k^2}} = \\ &= \frac{(\omega + \Omega_k)(N^2 - L) + (\omega - \Omega_k)(N^2 - R)}{(\omega + \Omega_k)(N^2 - L) - (\omega - \Omega_k)(N^2 - R)}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

В волне с $N^2 = R$ при $\theta = 0$ выполняется соотношение $iE_x/E_y = 1$, и электрическое поле имеет правую круговую поляризацию. Другими словами, электрическое поле вращается в направлении ларморовского вращения электронов. Движение ионов и электронов также правостороннее круговое. В волне с $N^2 = L$ при $\theta \rightarrow 0$ отношение $iE_x/E_y = -1$, и электрическое поле имеет левую круговую поляризацию. Движение ионов и электронов также левостороннее круговое. Волны с $N^2 = R$ и $N^2 = L$ при $\theta \rightarrow 0$ называются *R-волной* и *L-волной*, соответственно. Решение дисперсионного уравнения (10.25) при $\theta = 0$ есть

$$N^2 = \frac{1}{2} \left(R + L \pm \frac{|K_{\parallel}|}{K_{\parallel}} |R - L| \right). \quad (10.31)$$

Видно, что R- и L-волны меняются местами при изменении знака K_{\parallel} . Когда $K_{\times} = R - L$ меняет знак, R- и L-волны также меняются местами.

Когда $\theta = \pi/2$, электрическое поле волны с $N^2 = K_{\parallel}$ равно $E_x = E_y = 0$, $E_z \neq 0$. Для волны с $N^2 = RL/K_{\perp}$ электриче-

ское поле удовлетворяет соотношениям $iE_x/E_y = -(R - L)/(R + L) = -K_{\times}/K_{\perp}$, $E_z = 0$. Волны с $N^2 = K_{\parallel}$ и $N^2 = RL/K_{\perp}$ при $\theta \rightarrow \pi/2$ называются обыкновенной волной (О) и необыкновенной волной (Х) соответственно. Следует подчеркнуть, что электрическое поле необыкновенной волны при $\theta = \pi/2$ перпендикулярно магнитному полю ($E_z = 0$), а электрическое поле обыкновенной волны при $\theta = \pi/2$ параллельно магнитному полю ($E_x = E_y = 0$). Дисперсионное соотношение (10.24) при $\theta = \pi/2$ имеет вид

$$\begin{aligned} N^2 &= \frac{1}{2K_{\perp}}(K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 + K_{\parallel}K_{\perp} + |K_{\perp}^2 - K_{\times}^2 - K_{\parallel}K_{\perp}|) = \\ &= \frac{1}{2K_{\perp}}(RL + K_{\parallel}K_{\perp} \pm |RL - K_{\parallel}K_{\perp}|), \quad (10.32) \end{aligned}$$

так что обыкновенная волна и необыкновенная волна меняются местами при $RL - K_{\parallel}K_{\perp} = 0$.

Помимо разделения на R-и L-волны, а также на О- и Х-волны, существует другая классификация, а именно, разделение на *быструю* волну и *медленную* волну, следуя разнице фазовых скоростей. Так как выражение под квадратным корнем в уравнении $N^2 = (B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2})/2A$ всегда положительно, как это ясно из (10.24), быстрая и медленная волны не меняются местами в интервале между $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$.

10.2б. Явления отсечки и резонанса

Показатель преломления (10.24) может обратиться в бесконечность или в нуль. Если $N^2 = 0$, говорят, что волна имеет *отсечку*; при отсечке фазовая скорость

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{N} \quad (10.33)$$

становится бесконечной. Как ясно из (10.20), (10.23), отсечка имеет место, когда

$$K_{\parallel} = 0 \quad R = 0 \quad L = 0. \quad (10.34)$$

Когда $N^2 = \infty$, говорят, что волна имеет *резонанс*; здесь фазовая скорость становится равной нулю. При резонансе волна будет поглощаться плазмой (см. гл. 11). Резонансное условие имеет вид

$$\text{tg}^2 \theta = -\frac{K_{\parallel}}{K_{\perp}}. \quad (10.35)$$

При $\theta = 0$ резонансное условие приобретает вид $K_{\perp} = (R + L)/2 \rightarrow \pm\infty$. Условие $R \rightarrow \pm\infty$ удовлетворяется при $\omega = \Omega_e$,

где Ω_e — электронная циклотронная частота. Этот случай называется *электронным циклотронным резонансом*. Условие $L \rightarrow \pm\infty$ выполняется при $\omega = |\Omega_i|$, и этот случай называется *ионным циклотронным резонансом*.

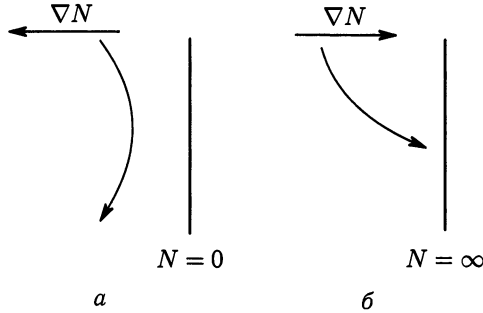


Рис. 10.2. Распространение волны: а — около области отсечки и б — вблизи резонансной области

При $\theta = \pi/2$ резонансное условие имеет вид $K_{\perp} = 0$. Этот случай называется *гибридным резонансом*. Когда волна приближается к области отсечки, ее траектория искривляется согласно закону преломления Снеллиуса, и, в конце концов, волна отражается (рис. 10.2, а). Когда волны приближаются к области резонанса, они распространяются перпендикулярно резонансной зоне. Фазовая скорость стремится к нулю, и энергия волн поглощается.

§ 10.3. Волны в двухкомпонентной плазме

Рассмотрим плазму, состоящую из электронов и ионов одного сорта. Условие зарядовой нейтральности имеет вид

$$n_i Z_i = n_e. \tag{10.36}$$

Для удобства введем безразмерный параметр

$$\delta = \frac{\mu_0(n_i m_i + n_e m_e) c^2}{B_0^2}. \tag{10.37}$$

Величина, определенная равенством (10.13), которая была также введена в разд. 2.2,

$$\Pi_e^2 = n_e e^2 / (\epsilon_0 m_e) \tag{10.38}$$

называется квадратом электронной плазменной частоты. Аналогично вводится и ионная плазменная частота. Легко получить соотношения

$$\begin{aligned} \Pi_e^2 / \Pi_i^2 &= m_i / m_e \gg 1, \\ \frac{\Pi_i^2 + \Pi_e^2}{|\Omega_i| \Omega_e} &= \delta \approx \frac{\Pi_i^2}{\Omega_i^2}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

K_{\perp} , K_{\times} , K_{\parallel} , и R , L даются формулами

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &= 1 - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \\ K_{\times} &= -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} \frac{\Omega_i}{\omega} - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \frac{\Omega_e}{\omega}, \\ K_{\parallel} &= 1 - \frac{\Pi_e^2 + \Pi_i^2}{\omega^2} \approx 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (10.40)$$

$$R = 1 - \frac{\Pi_e^2 + \Pi_i^2}{(\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e)} \approx \frac{\omega^2 - (\Omega_i + \Omega_e)\omega + \Omega_i\Omega_e - \Pi_e^2}{(\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e)}, \quad (10.41)$$

$$L = 1 - \frac{\Pi_e^2 + \Pi_i^2}{(\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e)} \approx \frac{\omega^2 + (\Omega_i + \Omega_e)\omega + \Omega_i\Omega_e - \Pi_e^2}{(\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e)}. \quad (10.42)$$

Дисперсионные соотношения для трех типов волн, распространяющихся параллельно \mathbf{B}_0 (т. е. при $\theta = 0$ и с $K_{\parallel} = 0$, $N^2 = R$, $N^2 = L$) тогда принимают вид

$$\omega^2 = \Pi_e^2, \quad (10.43)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\parallel}^2} = \frac{1}{R} = \frac{(\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e)}{\omega^2 - \omega\Omega_e + \Omega_e\Omega_i - \Pi_e^2} = \frac{(\omega + |\Omega_i|)(\omega - \Omega_e)}{(\omega - \omega_R)(\omega + \omega_L)}, \quad (10.44)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\parallel}^2} = \frac{1}{L} = \frac{(\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e)}{\omega^2 + \omega\Omega_e + \Omega_e\Omega_i - \Pi_e^2} = \frac{(\omega - |\Omega_i|)(\omega + \Omega_e)}{(\omega - \omega_L)(\omega + \omega_R)}. \quad (10.45)$$

Здесь

$$\omega_R = \frac{\Omega_e}{2} + \left(\left(\frac{\Omega_e}{2} \right)^2 + \Pi_e^2 + |\Omega_e\Omega_i| \right)^{1/2} > 0, \quad (10.46)$$

$$\omega_L = -\frac{\Omega_e}{2} + \left(\left(\frac{\Omega_e}{2} \right)^2 + \Pi_e^2 + |\Omega_e\Omega_i| \right)^{1/2} > 0. \quad (10.47)$$

Заметим, что $\Omega_e > 0$, $\Omega_i < 0$ и $\omega_R > \Omega_e$. Графики дисперсионных зависимостей $\omega(k_{\parallel})$ показаны на рис. 10.3, а. Дисперсионные соотношения для волн, распространяющихся перпендикулярно

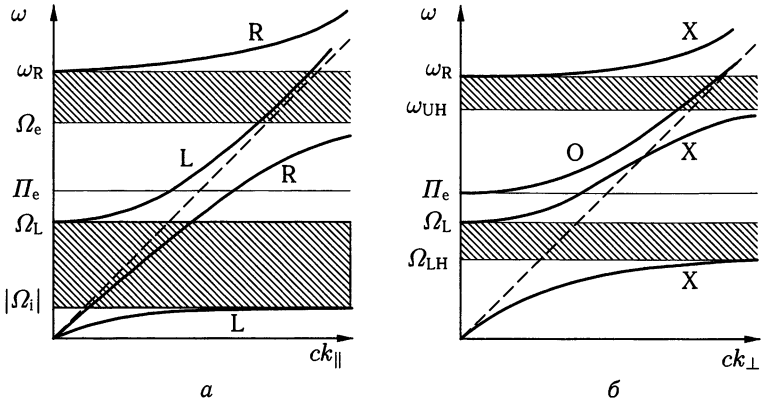


Рис. 10.3. Дисперсионные соотношения для R- и L- волн, распространяющихся параллельно магнитному полю ($\theta = 0$) (а). Дисперсионные соотношения для O- и X-волн, распространяющихся перпендикулярно магнитному полю ($\theta = \pi/2$) (б)

\mathbf{B}_0 с $N^2 = K_{\parallel}$ (обыкновенная волна) и с $N^2 = (K_{\perp}^2 - K_{\times}^2)/K_{\perp}$ (необыкновенная волна), имеют вид

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} = \frac{1}{K_{\parallel}} = \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{\Pi_e^2}{c^2 k_{\perp}^2}, \quad (10.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} &= \frac{K_{\perp}}{K_{\perp}^2 - K_{\times}^2} = \frac{K_{\perp}}{RL} = \\ &= \frac{2(\omega^2 - \Omega_i^2)(\omega^2 - \Omega_e^2) - \Pi_e^2((\omega + \Omega_i)(\omega + \Omega_e) + (\omega - \Omega_i)(\omega - \Omega_e))}{2(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)} = \\ &= \frac{\omega^4 - (\Omega_i^2 + \Omega_e^2 + \Pi_e^2)\omega^2 + \Omega_i^2 \Omega_e^2 - \Pi_e^2 \Omega_i \Omega_e}{(\omega^2 - \omega_L^2)(\omega^2 - \omega_R^2)}. \end{aligned} \quad (10.49)$$

Уравнение (10.48) представляет собой дисперсионное уравнение электронной плазменной волны (ленгмюровской волны). Определим ω_{UH} и ω_{LH} равенствами

$$\omega_{UH}^2 \equiv \Omega_e^2 + \Pi_e^2, \quad (10.50)$$

$$\frac{1}{\omega_{LH}^2} \equiv \frac{1}{\Omega_i^2 + \Pi_i^2} + \frac{1}{|\Omega_i| \Omega_e}. \quad (10.51)$$

ω_{UH} называется частотой верхнегибридного резонанса, а ω_{LH} называется частотой нижнегибридного резонанса. Используя

их, мы можем записать (10.49) в виде

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{\perp}^2} = \frac{(\omega^2 - \omega_{\text{LH}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\text{L}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{R}}^2)}. \quad (10.52)$$

Справедливы соотношения $\omega_{\text{R}} > \omega_{\text{UH}} > \Pi_e, \Omega_e$ и $\omega_{\text{LH}}^2 < \Omega_e |\Omega_i|, \Omega_i^2 + \Pi^2$. Дисперсионные кривые $\omega(k_{\perp})$ показаны на рис. 10.3, б. Наклон ω/ck_{\perp} на графике $\omega(k_{\perp})$ есть отношение фазовой скорости v_{ph} к c . Чем круче наклон, тем больше фазовая скорость. Области (на шкале ω) R- и L-волн при $\theta = 0$, O- и X-волн при $\theta = \pi/2$, а также F- и S-волн показаны на рис. 10.4 для случая $\omega_{\text{L}} < \Pi_e < \Omega_e$.

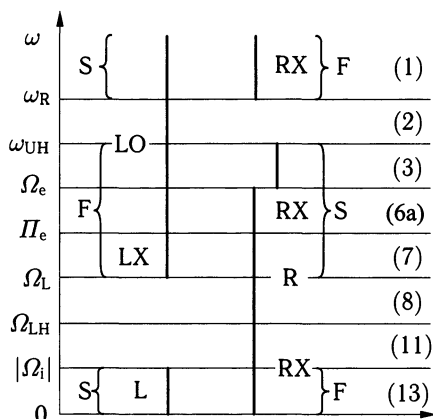


Рис. 10.4. Области ω для R- и L-волн при $\theta = 0$, O- и X- волн при $\theta = \pi/2$, F- и S-волн в случае ($\omega_{\text{L}} < \Pi_e < \Omega_e$). Числа справа соответствуют номеру области на диаграмме СМА, рис. 10.5

Поясним теперь диаграмму СМА (рис. 10.5), которую предложили Клемов (P. C. Clemmow) и Малэли (R. F. Mullaly), а позже усовершенствовал Эллис (W. P. Allis) [3]. По вертикальной и горизонтальной осям отложены величины Ω_e^2/ω^2 и $(\Pi_i^2 + \Pi_e^2)/\omega^2$, соответственно. Условия отсечки $R = 0$ ($\omega = \omega_{\text{R}}$), $L = 0$ ($\omega = \omega_{\text{L}}$), $K_{\parallel} = 0$ ($\omega = \Omega_e$) показаны пунктирными линиями, а резонансные условия $R = \infty$ ($\omega = \Omega_e$), $L = \infty$ ($\omega = \Omega_i$), $K_{\perp} = 0$ ($\omega = \Omega_{\text{LH}}$, $\omega = \Omega_{\text{UH}}$) — сплошными линиями. Линии отсечек и резонансов образуют границы различных областей. Граница $RL = K_{\parallel}K_{\perp}$, при которой O-волна и X-волна меняются местами, показана штрих-пунктирной линией. Для различных областей показаны поверхности постоянной фазы R- и L-волн, и O- и X-волн. Так как вертикальная и горизонтальная координаты пропорциональ-

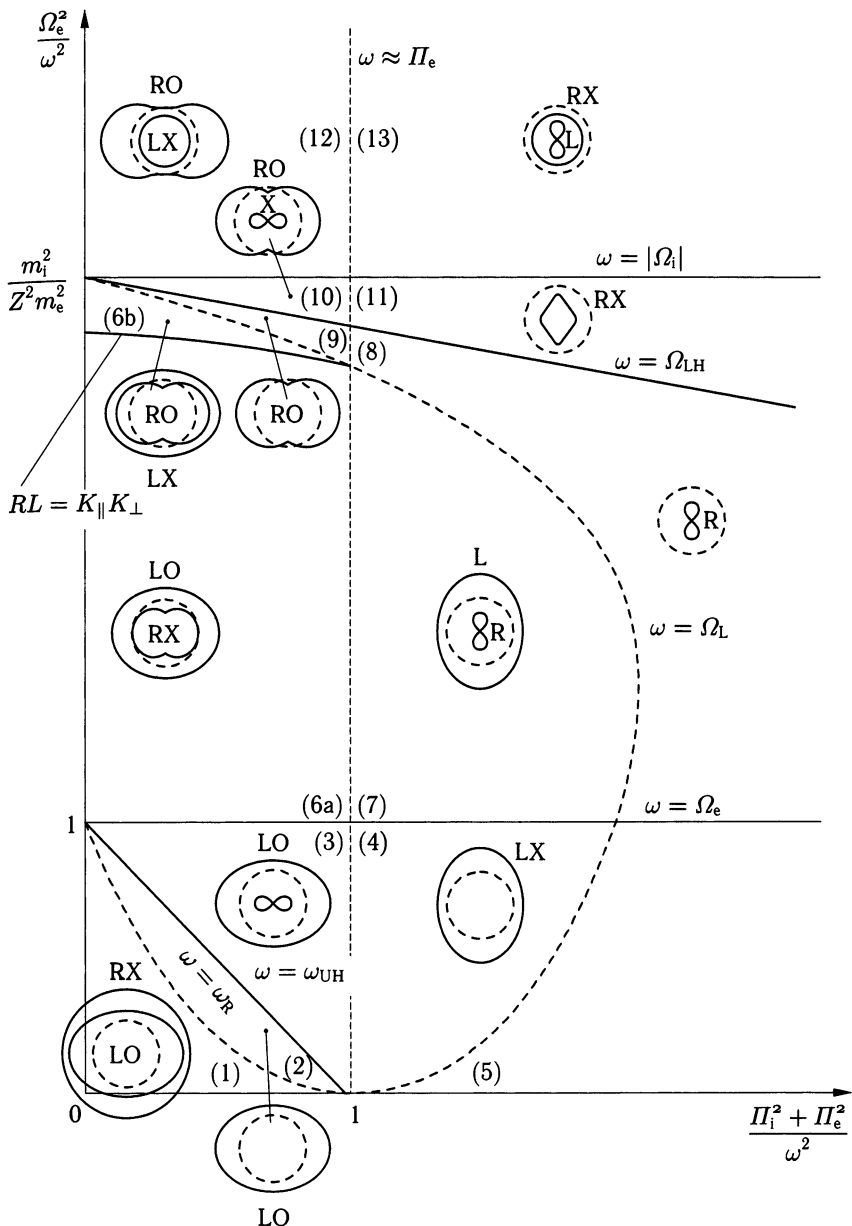


Рис. 10.5. Диаграмма СМА для двухкомпонентной плазмы. В каждой области нарисованы поверхности постоянной фазы. Пунктирные круги показывают волновой фронт в вакууме. Магнитное поле растет по направлению к верху диаграммы

ны величине B и плотности n_e , можно легко сопоставить волне соответствующую область, просто задавая ее частоту ω .

§ 10.4. Типы волн

10.4а. Альфвеновские волны

Если частота ω меньше ионной циклотронной частоты ($\omega \ll \ll |\Omega_i|$), тензор диэлектрической проницаемости \mathbf{K} можно выразить как

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &= 1 + \delta, \\ K_{\times} &= 0, \\ K_{\parallel} &= 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (10.53)$$

где $\delta = \mu_0 n_i m_i c^2 / B_0^2$. Так как $\Pi_e^2 / \omega^2 = (m_i / m_e) (\Omega_i^2 / \omega^2) \delta$, находим $\Pi_e^2 / \omega^2 \gg \delta$. Полагая, что $\Pi_e^2 / \omega^2 \gg 1$, имеем $|K_{\parallel}| \gg |K_{\perp}|$; тогда A, B, C в (10.20) даются выражениями

$$\left. \begin{aligned} A &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \cos^2 \theta, \\ B &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} (1 + \delta) (1 + \cos^2 \theta), \\ C &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} (1 + \delta)^2, \end{aligned} \right\} \quad (10.54)$$

и дисперсионные соотношения принимают вид

$$\frac{c^2}{N^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + \delta} = \frac{c^2}{1 + \frac{\mu_0 \rho_m c^2}{B_0^2}} \approx \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_m}, \quad (10.55)$$

$$\frac{c^2}{N^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c^2}{1 + \delta} \cos^2 \theta \quad (10.56)$$

(ρ_m — массовая плотность). Волна, удовлетворяющая дисперсионному соотношению (10.56), называется *альфвеновской волной*. Определим *альфвеновскую скорость* равенством

$$v_A^2 = \frac{c^2}{1 + \delta} = \frac{c^2}{1 + \frac{\mu_0 \rho_m c^2}{B_0^2}} \approx \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho_m}. \quad (10.57)$$

Уравнения (10.55) и (10.56) соответствуют модам, находящимся в области (13) диаграммы СМА. Подстановка (10.55) и (10.56) в (10.19) показывает, что E_z для обеих мод обращается в нуль,

$E_z = 0$; $E_x = 0$ для моды (10.55) (R-волна, F-волна, X-волна) и $E_y = 0$ для моды (10.56) (L-волна, S-волна). Из (10.6) мы находим для $\omega \ll |\Omega_i|$, что

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad (10.58)$$

и $\mathbf{v}_i = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0)/B_0^2$, так что \mathbf{v}_i для моды (10.55)

$$\mathbf{v}_i \approx \hat{\mathbf{x}} \cos(k_x x + k_z z - \omega), \quad (10.59)$$

а \mathbf{v}_i для моды (10.56):

$$\mathbf{v}_i \approx \hat{\mathbf{y}} \cos(k_x x + k_z z - \omega t), \quad (10.60)$$

где $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ — единичные вектора вдоль осей x и y соответственно. В силу последних соотношений быстрая мода (10.55) называется *волной сжатия*, а медленная волна (10.56) называется *волной кручения, или сдвиговой волной*. R-волна (10.55), хотя и искажается при переходе из области (13) в области (11) и (8), но все же сохраняется, а L-волна (10.56) исчезает при этих переходах.

Как ясно из (10.58), плазма заморожена в магнитное поле. Существует натяжение $B^2/2\mu_0$ вдоль силовых линий магнитного поля и давление $B^2/2\mu_0$ перпендикулярно магнитному полю. Так как плазма с массовой плотностью ρ_m привязана к силовым линиям, скорость распространения волн в направлении поля оказывается равной $B_0/(\mu_0\rho_m)^{1/2}$.

10.4б. Ионные циклотронные и быстрые магнитозвуковые волны

Рассмотрим случай, когда частота ω сдвигается от низкой частоты к ионной циклотронной частоте и $\Pi_e^2/\omega^2 \gg 1$. Соответствующие волны располагаются в областях (13) и (11) диаграммы СМА. Когда $|\omega| \ll \Omega_e$, $\delta \gg 1$ и $\Pi_e^2/\omega^2 \gg 1$, величины K_\perp , K_\times и K_\parallel выражаются как

$$K_\perp = \frac{-\delta\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}, \quad K_\times = \frac{-\delta\omega\Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}, \quad K_\parallel = -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2}. \quad (10.61)$$

Так как $\Pi_e^2/\omega^2 = (m_i/m_e)(\Omega_i^2/\omega^2)\delta \gg \delta$, коэффициенты A , B , C принимают вид

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \cos^2 \theta, \\ B &= \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \frac{\delta \Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2} (1 + \cos^2 \theta), \\ C &= \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \frac{\delta^2 \Omega_i^2}{\omega^2 - \Omega_i^2}, \end{aligned} \right\} \quad (10.62)$$

а дисперсионное уравнение (с учетом того, что $\Pi_i^2 = \Omega_i^2 \delta$)

$$N^4 \cos^2 \theta - N^2 \frac{\delta \Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} (1 + \cos^2 \theta) + \frac{\delta^2 \Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2} = 0. \quad (10.63)$$

Поскольку $N^2 \cos^2 \theta = c^2 k_{\parallel}^2 / \omega^2$ и $N^2 \sin^2 \theta = c^2 k_{\perp}^2 / \omega^2$, мы можем записать (10.63) в виде

$$k_{\perp}^2 c^2 = \frac{\omega^4 \delta^2 \Omega_i^2 - \omega^2 (2\delta \Omega_i^2 k_{\parallel}^2 c^2 + k_{\parallel}^4 c^4) + \Omega_i^2 k_{\parallel}^4 c^4}{\omega^2 (\delta \Omega_i^2 + k_{\parallel}^2 c^2) - \Omega_i^2 k_{\parallel}^2 c^2}, \quad (10.64)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} &= \frac{(\omega/v_A k_{\parallel})^4 - (\omega/v_A k_{\parallel})^2 - (\omega/\Omega_i)^2 + 1}{(\omega/v_A k_{\parallel})^2 - (1 - \omega^2/\Omega_i^2)} = \\ &= \frac{((\omega/v_A k_{\parallel})^2 - (1 - \omega/\Omega_i))((\omega/v_A k_{\parallel})^2 - (1 + \omega/\Omega_i))}{(\omega/v_A k_{\parallel})^2 - (1 - \omega^2/\Omega_i^2)} \end{aligned} \quad (10.64')$$

(учтено, что $v_A^2 = c^2/\delta$). Следовательно, резонанс имеет место при

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + \delta \Omega_i^2} = \Omega_i^2 \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + \Pi_i^2}, \quad (10.65)$$

иначе

$$\left(\frac{\omega}{v_A k_{\parallel}} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2. \quad (10.65')$$

Когда $|\omega|$ стремится к $|\Omega_i|$, из дисперсионного уравнения (10.63) приближенно имеем

$$N^2 \approx \frac{\delta}{1 + \cos^2 \theta}, \quad (10.66)$$

$$N^2 \cos^2 \theta \approx \delta (1 + \cos^2 \theta) \frac{\Omega_i^2}{\Omega_i^2 - \omega^2}. \quad (10.67)$$

Мода (10.66) соответствует альфвеновской волне сжатия (быстрая волна) и не подвержена воздействию ионного циклотронного резонанса. Дисперсионное соотношение (10.67) описывает *ионную циклотронную волну* и может быть представлено в виде

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \left(1 + \frac{\Pi_i^2}{k_{\parallel}^2 c^2} + \frac{\Pi_i^2}{k_{\parallel}^2 c^2 + k_{\perp}^2 c^2} \right)^{-1}. \quad (10.68)$$

Заметим, что здесь ω^2 всегда меньше, чем Ω_i^2 . Движение ионов становится левосторонним круговым (т. е. в направлении ларморовского движения ионов) при $\omega \approx |\Omega_i|$ (см. (10.30)).

Для моды (10.66) выполняется соотношение $iE_x/E_y = 1$, т. е. она имеет круговую поляризацию, причем электрическое поле вращается в сторону, противоположную ларморовскому движению ионов. Для ионной циклотронной волны

$$\frac{iE_x}{E_y} \approx -\frac{\omega}{|\Omega_i|} \frac{1}{\left(1 + \frac{k_{\perp}^2}{k_{\parallel}^2} \right)}, \quad (10.69)$$

т. е. электрическое поле эллиптически поляризовано и вращается в сторону ларморовского вращения ионов.

10.4с. Нижнегибридный резонанс

Частота нижнегибридного резонанса при $\theta = \pi/2$ дается выражением

$$\omega^2 = \omega_{\text{ЛН}}^2, \quad \frac{1}{\omega_{\text{ЛН}}^2} = \frac{1}{\Omega_i^2 + \Pi_i^2} + \frac{1}{|\Omega_i|\Omega_e}, \quad \frac{\omega_{\text{ЛН}}^2}{|\Omega_i|\Omega_e} = \frac{\Pi_i^2 + \Omega_i^2}{\Pi_i^2 + |\Omega_i|\Omega_e + \Omega_i^2}. \quad (10.70)$$

Когда плотность велика и $\Pi_i^2 \gg |\Omega_i|\Omega_e$, получаем, что $\omega_{\text{ЛН}} = (|\Omega_i|\Omega_e)^{1/2}$. Если $\Pi_i^2 \ll |\Omega_i|\Omega_e$, то $\omega_{\text{ЛН}}^2 = \Pi_i^2 + \Omega_i^2$. При нижнегибридном резонансе имеем $E_y = E_z = 0$, а $E_x \neq 0$.

Если плотность велика (т. е. $\Pi_i^2 > |\Omega_i|\Omega_e$), то $|\Omega_i| \ll \omega_{\text{ЛН}} \ll \Omega_e$, и анализ движения ионов и электронов становится простым. Из (10.7) следует, что скорость определяется выражением

$$v_{k,x} = \frac{i\epsilon_k E_x}{B_0} \frac{\omega |\Omega_k|}{\omega^2 - \Omega_k^2}, \quad (10.71)$$

и уравнение $v_{k,x} = dx_k/dt = -i\omega x_k$ дает

$$x_k = \frac{-\epsilon_k E_x}{B_0} \frac{|\Omega_k|}{\omega^2 - \Omega_k^2}. \quad (10.72)$$

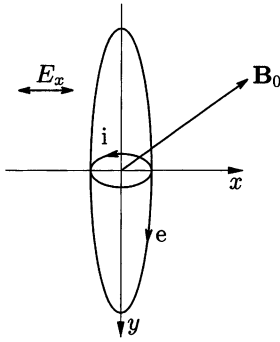


Рис. 10.6. Орбиты ионов и электронов при нижнегибридном резонансе

При $\omega^2 = |\Omega_i|\Omega_e$ находим, что $x_i \approx -E_x/B_0\Omega_e$, а $x_e \approx -E_x/B_0\Omega_e$, или $x_i \approx x_e$ (см. рис. 10.6). Следовательно, разделения зарядов не происходит, и нижнегибридная волна может существовать.

Мы рассматривали нижний гибридный резонанс при $\theta = \pi/2$. Рассмотрим случай, когда θ слегка отличается от $\theta = \pi/2$. Резонансное условие получается из (10.24) следующим образом:

$$K_{\perp} \sin^2 \theta + K_{\parallel} \cos^2 \theta = 0. \quad (10.73)$$

При использовании (10.46), (10.50) и (10.51), (10.73) сводится к

$$\frac{(\omega^2 - \omega_{\text{LH}}^2)(\omega^2 - \omega_{\text{UH}}^2)}{(\omega^2 - \Omega_i^2)(\omega^2 - \Omega_e^2)} \sin^2 \theta + \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}\right) \cos^2 \theta = 0. \quad (10.74)$$

Если θ близко к $\pi/2$ и ω не слишком отличается от ω_{LH} , получаем

$$\begin{aligned} \omega^2 - \omega_{\text{LH}}^2 &= \frac{(\omega_{\text{LH}}^2 - \Omega_e^2)(\omega_{\text{LH}}^2 - \Omega_i^2)}{\omega_{\text{LH}}^2 - \omega_{\text{UH}}^2} \frac{\Pi_e^2 - \omega_{\text{LH}}^2}{\omega_{\text{LH}}^2} \cos^2 \theta \approx \\ &\approx \frac{\Omega_e^2 \Pi_e^2}{\omega_{\text{UH}}^2} \left(1 - \left(\frac{\Omega_i}{\omega_{\text{LH}}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega_{\text{LH}}}{\Pi_e}\right)^2\right) \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Так как $\omega_{\text{UH}}^2 \omega_{\text{LH}}^2 = \Omega_i^2 \Omega_e^2 + \Pi_e^2 |\Omega_i| \Omega_e$, то ω^2 выражается в виде

$$\omega^2 = \omega_{\text{LH}}^2 \left[1 + \frac{m_i}{Zm_e} \cos^2 \theta \frac{\left(1 - \left(\frac{\Omega_i}{\omega_{\text{LH}}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{\omega_{\text{LH}}}{\Pi_e}\right)^2\right)}{\left(1 + \frac{|\Omega_i| \Omega_e}{\Pi_e^2}\right)} \right]. \quad (10.75)$$

При $\Pi_e^2/|\Omega_i|\Omega_e \approx \delta = c^2/v_A^2 \gg 1$ соотношение (10.75) приобретает вид

$$\omega^2 = \omega_{\text{LH}}^2 \left(1 + \frac{m_i}{Zm_e} \cos^2 \theta\right). \quad (10.76)$$

Если θ отличается от $\pi/2$ даже на малую величину $(Zm_e/m_i)^{1/2}$, величина ω^2 становится равной $\omega^2 \approx 2\omega_{\text{LH}}^2$, так что (10.76) верно только в очень малой области вблизи $\theta = \pi/2$.

10.4d. Верхнегибридный резонанс

Частота верхнегибридного резонанса $\omega_{\text{УН}}$ дается выражением

$$\omega_{\text{УН}}^2 = \Pi_e^2 + \Omega_e^2. \quad (10.77)$$

Так как эта частота гораздо больше, чем $|\Omega_i|$, движением ионов можно пренебречь.

10.4e. Электронные циклотронные волны

Будем рассматривать высокочастотные волны, так что движение ионов можно не учитывать. Если $\omega \gg |\Omega_i|$, то

$$\left. \begin{aligned} K_{\perp} &\approx 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2}, \\ K_{\times} &\approx -\frac{\Pi_e^2}{\omega^2 - \Omega_e^2} \frac{\Omega_e}{\omega}, \\ K_{\parallel} &= 1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad ((10.78))$$

Решение дисперсионного уравнения $AN^4 - BN^2 + C = 0$

$$N^2 = \frac{B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}}{2A}$$

можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} N^2 - 1 &= \frac{-2(A - B + C)}{2A - B \pm (B^2 - 4AC)^{1/2}} \\ &= \frac{-2\Pi_e^2(1 - \Pi_e^2/\omega^2)}{2\omega^2(1 - \Pi_e^2/\omega^2) - \Omega_e^2 \sin^2 \theta \pm \Omega_e \Delta}, \end{aligned} \quad (10.79)$$

$$\Delta = \left(\Omega_e^2 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right)^2 \cos^2 \theta \right)^{1/2}. \quad (10.80)$$

Обыкновенная и необыкновенная волна получаются при выборе знака плюс или минус в (10.79), соответственно. В случае

$$\Omega_e^2 \sin^4 \theta \gg 4\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right)^2 \cos^2 \theta \quad (10.81)$$

находим

$$N^2 = \frac{1 - \Pi_e^2/\omega^2}{1 - (\Pi_e^2/\omega^2) \cos^2 \theta}, \quad (10.82)$$

$$N^2 = \frac{(1 - \Pi_e^2/\omega^2)^2 \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta}{(1 - \Pi_e^2/\omega^2) \omega^2 - \Omega_e^2 \sin^2 \theta}. \quad (10.83)$$

При $\theta \sim \pi/2$ уравнение (10.82) переходит в $N^2 = K_{\parallel} = 1 - \Pi_e^2/\omega^2$ и не зависит от величины магнитного поля. Эта волна используется для измерений плотности методом микроволновой интерферометрии.

В случае

$$\Omega_e^2 \sin^4 \theta \ll 4\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}\right)^2 \cos^2 \theta \quad (10.84)$$

при дополнительном условии

$$\Omega_e^2 \sin^2 \theta \ll \left| 2\omega^2 \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}\right) \right| \quad (10.85)$$

дисперсионные соотношения принимают вид

$$N^2 = 1 - \frac{\Pi_e^2}{(\omega + \Omega_e \cos \theta)\omega}, \quad (10.86)$$

$$N^2 = 1 - \frac{\Pi_e^2}{(\omega - \Omega_e \cos \theta)\omega}. \quad (10.87)$$

Уравнение (10.86) соответствует L-волне, а (10.87) — R-волне. Вблизи электронной циклотронной частоты происходит резонанс R-волны. Эта волна может распространяться в областях (7) и (8) диаграммы СМА, где частота меньше, чем плазменная. Эта волна называется *электронной циклотронной волной*. Нужно отметить, что предположения (10.84) и (10.85) не выполняются вблизи $K_{\parallel} = 1 - \Pi_e^2/\omega^2 \approx 0$.

Электронную циклотронную волну также называют *вистлером*. Электромагнитные возмущения, инициируемые вспышками молний, распространяются по ионосфере вдоль линий магнитного поля. Частота индуцированных молниями вистлеров попадает в звуковой диапазон, а их групповая скорость растет с частотой, так что эта волна воспринимается как свист с понижающимся тоном. Поэтому она и называется вистлером (whistle по-английски значит свист).

§ 10.5. Электростатические волны

Если электрическое поле \mathbf{E} может быть выражено через электростатический потенциал

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -ik\phi, \quad (10.88)$$

волна называется *электростатической*. Такое электрическое поле \mathbf{E} всегда параллельно волновому вектору \mathbf{k} , так что электростатические волны продольные. Магнитное поле \mathbf{B}_1 электростатической волны всегда равно нулю:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega = 0. \quad (10.89)$$

Альфвеновские волны не электростатические. Здесь мы рассмотрим условия существования электростатических волн. Так как дисперсионное соотношение имеет вид

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

скалярное умножение его на \mathbf{N} дает

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}) = 0,$$

где \mathbf{E}_{\parallel} и \mathbf{E}_{\perp} — компоненты электрического поля, параллельная и перпендикулярная \mathbf{k} . Если $|\mathbf{E}_{\parallel}| \gg |\mathbf{E}_{\perp}|$, то волна электростатическая, и дисперсионное соотношение приобретает вид

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{N} = 0. \quad (10.90)$$

Перепишав дисперсионное соотношение как

$$(\mathbf{N}^2 - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_{\parallel},$$

мы видим, что неравенство $|\mathbf{E}_{\parallel}| \gg |\mathbf{E}_{\perp}|$ справедливо, когда для всех K_{ij} выполняется

$$|\mathbf{N}^2| \gg |K_{ij}|. \quad (10.91)$$

Дисперсионное соотношение (10.90) для электростатической волны при этом имеет вид

$$k_x^2 K_{xx} + 2k_x k_z K_{xz} + k_z^2 K_{zz} = 0. \quad (10.92)$$

Условие (10.91) для электростатической волны означает, что фазовая скорость $\omega/k = c/N$ волны мала. Величины K_{ij} уже приводились в (10.9)–(10.12) для холодной плазмы, а общая формула для горячей плазмы будет обсуждаться в гл. 12, 13. Мы установили, что магнитное поле \mathbf{B}_1 электростатической волны равно нулю. Возмущения магнитного поля распространяются с альфвеновской скоростью $v_A \approx B_0/(\mu_0 n_i m_i)^{1/2}$. Если фазовая скорость волны много меньше, чем v_A , возмущение магнитного поля затухнет через несколько периодов волны, и распространяющееся возмущение магнитного поля обратится в нуль. Если принять в качестве типичной фазовой скорости электростатиче-

ских волн тепловую скорость электронов v_{Te} , то условие $v_A > v_{Te}$ сводится к

$$\frac{B_0^2}{\mu_0 n_i m_i v_{Te}^2} = \frac{2m_e}{\beta_e m_i} > 1,$$

или

$$\beta_e < \frac{2m_e}{m_i}.$$

Это условие того, что волна электростатическая.

При резонансе показатель преломления N становится бесконечным. Так как при верхне- и нижнегибридных резонансах элементы тензора K_{ij} конечны, условие (10.91) выполняется, так что эти гибридные волны электростатические. Для ионной или электронной циклотронной волны некоторые из K_{ij} становятся бесконечными, поэтому эти циклотронные волны не всегда электростатические.

Список литературы

1. *Stix T.H.* The Theory of Plasma Waves. — N. Y.: McGraw-Hill, 1962 (русский перевод: *Стикс Т.* Теория плазменных волн. — М.: Атомиздат, 1965).
2. *Stix T.H.* Waves in Plasmas. — N. Y.: American Institute of Physics, 1992.
3. *Allis W.P., Buchsbaum S.J., Bers A.* Waves in Anisotropic Plasmas. — The MIT Press, Cambridge Mass., 1963 (русский перевод: *Эллис В., Буксбаум З., Берс А.* Волны в анизотропной плазме. — М.: Атомиздат, 1966).
4. *Bekefi G.* Radiation Processes in Plasmas. — N. Y.: John Willey and Son Inc. Gordon and Breach Science Publishers Inc., 1961 (русский перевод: *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме. — М.: Мир, 1971).

ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ И ЦИКЛОТРОННЫЙ РЕЗОНАНС

Л. Д. Ландау обнаружил, что существует механизм поглощения, благодаря которому частицы плазмы поглощают энергию волн даже в бесстолкновительной плазме при условии, что плазма не является холодной и функция распределения по скоростям имеет конечную ширину. Процессы обмена энергией между частицами и волной в бесстолкновительной плазме играют важную роль в нагреве плазмы с помощью волн (поглощение волн) и в механизме неустойчивостей (усиление волн). Эти важные процессы будут рассмотрены в рамках упрощенной физической модели в этой главе. В главах 12, 13, и в Приложении С они будут описаны более подробно. Члены, связанные с взаимодействием волна—частица, отсутствуют в диэлектрическом тензоре холодной плазмы, они появляются в диэлектрическом тензоре в моделях горячей плазмы.

§ 11.1. Затухание Ландау и резонансная раскачка

Предположим, что достаточно много частиц движутся с различными скоростями в направлении силовых линий магнитного поля. Когда электростатическая волна (продольная волна с $\mathbf{k} \parallel \mathbf{E}$) распространяется вдоль силовых линий магнитного поля, возникает взаимодействие между волной и группой частиц (см. рис. 11.1). Выберем ось z в направлении магнитного поля

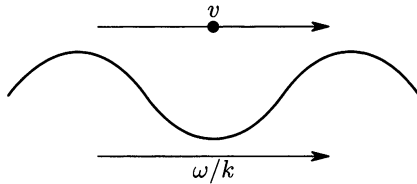


Рис. 11.1. Распространение волны и движение частиц в процессе затухания Ландау

и обозначим единичный вектор в этом направлении $\hat{\mathbf{z}}$. Тогда электрическое поле и скорость $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$ удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}}E \cos(kz - \omega t), \quad (11.1)$$

$$m \frac{dv}{dt} = qE \cos(kz - \omega t). \quad (11.2)$$

Электрическое поле \mathbf{E} — величина первого порядка малости. Решение (11.2) в нулевом порядке

$$z = v_0 t + z_0,$$

а уравнение первого порядка

$$m \frac{dv_1}{dt} = qE \cos(kz_0 + kv_0 t - \omega t). \quad (11.3)$$

Решение (11.3) для начального условия $v_1 = 0$ при $t = 0$ имеет вид

$$v_1 = \frac{qE}{m} \frac{\sin(kz_0 + kv_0 t - \omega t) - \sin kz_0}{kv_0 - \omega}. \quad (11.4)$$

Изменение кинетической энергии частицы

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = v \frac{d}{dt} mv = v_1 \frac{d}{dt} mv_1 + v_0 \frac{d}{dt} mv_2 + \dots \quad (11.5)$$

Из (11.2), (11.4) получаем соотношения

$$m \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} = qE \cos(k(z_0 + v_0 t + z_1) - \omega t) = \\ = qE \cos(kz_0 + \alpha t) - qE \sin(kz_0 + \alpha t) kz_1,$$

$$z_1 = \int_0^t v_1 dt = \frac{qE}{m} \left(\frac{-\cos(kz_0 + \alpha t) + \cos kz_0}{\alpha^2} - \frac{t \sin kz_0}{\alpha} \right),$$

где

$$\alpha \equiv kv_0 - \omega.$$

Используя их, можно преобразовать (11.5) к форме

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \frac{q^2 E^2}{m} \left(\frac{\sin(kz_0 + \alpha t) - \sin kz_0}{\alpha} \right) \cos(kz_0 + \alpha t) \\ - \frac{kv_0 q^2 E^2}{m} \left(\frac{-\cos(kz_0 + \alpha t) + \cos kz_0}{\alpha^2} - \frac{t \sin kz_0}{\alpha} \right) \sin(kz_0 + \alpha t).$$

Усреднение предыдущей величины по начальному положению z_0 дает

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0} = \frac{q^2 E^2}{2m} \left(\frac{-\omega \sin \alpha t}{\alpha^2} + t \cos \alpha t + \frac{\omega t \cos \alpha t}{\alpha} \right). \quad (11.6)$$

Если мы произведем усреднение (11.6) по скоростям v_0 с функцией распределения

$$f(v_0) = f\left(\frac{\alpha + \omega}{k}\right) = g(\alpha)$$

в качестве весового множителя, то получим скорость роста кинетической энергии частиц. Функция распределения нормирована:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_0) dv_0 = \frac{1}{k} \int g(\alpha) d\alpha = 1.$$

Интеграл от второго члена в правой части (11.6)

$$\frac{1}{k} \int g(\alpha) t \cos \alpha t d\alpha = \frac{1}{k} \int g\left(\frac{x}{t}\right) \cos x dx \quad (11.7)$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Интеграл от третьего члена (11.6) принимает вид

$$\frac{\omega}{k} \int \frac{g(\alpha) t \cos \alpha t}{\alpha} d\alpha = \frac{\omega}{k} \int \frac{t}{x} g\left(\frac{x}{t}\right) \cos x dx. \quad (11.8)$$

Функцию $g(\alpha)$ можно рассматривать как сумму четной и нечетной функций. Четная функция не дает вклада в интеграл. Вклад нечетной функции стремится к нулю, когда $t \rightarrow \infty$, если $g(\alpha)$ непрерывна при $\alpha = 0$. Следовательно, остается только вклад первого члена в (11.6), и мы получаем

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0, v_0} = -\frac{\omega q^2 E^2}{2mk} \text{P} \int \frac{g(\alpha) \sin \alpha t}{\alpha^2} d\alpha, \quad (11.9)$$

где P обозначает главное значение интеграла в смысле Коши. Основной вклад в интеграл дает окрестность $\alpha = 0$, так что $g(\alpha)$ может быть разложена вблизи $\alpha = 0$:

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha g'(0) + \frac{\alpha^2}{2} g''(0) + \dots$$

Так как $\sin \alpha t / \alpha^2$ — четная функция, только второй член этого разложения дает вклад в интеграл, и для больших t

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0, v_0} = -\frac{\omega q^2 E^2}{2m|k|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g'(0) \sin \alpha t}{\alpha} d\alpha = \\ = \frac{-\pi q^2 E^2}{2m|k|} \left(\frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{\partial f(v_0)}{\partial v_0} \right)_{v_0=\omega/k}. \quad (11.10)$$

Если число частиц со скоростями, меньшими фазовой скорости волны, превышает число частиц со скоростями, чуть большими фазовой скорости волны, т. е. если $v_0 \partial f_0 / \partial v_0 < 0$, группа частиц в целом получает энергию от волны, а волна затухает. И наоборот, когда $v_0 \partial f_0 / \partial v_0 > 0$ при $v_0 = \omega/k$, частицы отдают энергию волне и амплитуда волны возрастает (рис. 11.2). Этот механизм

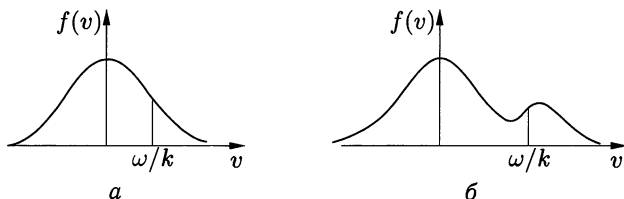


Рис. 11.2. *а* — затухание и *б* — резонансное усиление Ландау

называют *затуханием Ландау* [1] (*а* в случае $v_0 \partial f_0 / \partial v_0 > 0$ — *резонансным усилением*). Экспериментально существование затухания Ландау для волн в бесстолкновительной плазме продемонстрировали Малмберг и Уортон [2] в 1965 г. — через двадцать лет после предсказания Ландау.

Скорость роста (11.10) кинетической энергии частиц должна быть равна скорости затухания энергии волны. Поэтому скорость роста γ амплитуды поля волны ($\gamma < 0$ в случае затухания) определяется равенством

$$n \left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0 v_0} = -2\gamma W,$$

и инкремент γ дается выражением

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\Pi}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{|k|} \right) \left(v_0 \frac{\partial f(v_0)}{\partial v_0} \right)_{v_0=\omega/k}, \quad (11.11)$$

где $\Pi^2 = nq^2/\epsilon_0 m$, $W \approx 2\epsilon_0 E^2/4$, $\int f(v) dv = 1$.

Существует ограничение на применимость приближения, в котором получается линейное затухание Ландау. Упрощения, приводящие к такому затуханию, оправданы до тех пор, пока при протекании этого явления орбиты частиц не отклоняются от линейного решения. Время, необходимое для отклонения частиц от линейного приближения, определяется периодом колебаний в потенциальной яме, создаваемой электрическим полем волны ($\omega^2 \sim eEk/m$ из $m\omega^2 x = eE$). Этот период равен

$$\tau_{\text{osc}} = \frac{1}{\omega_{\text{osc}}} \approx \left(\frac{m}{ekE} \right)^{1/2}.$$

Условие применимости линейного приближения для затухания Ландау состоит в том, что время затухания $1/\gamma$ должно быть меньше, чем τ_{osc} , или столкновительное время $1/\nu_{\text{coll}}$ меньше, чем τ_{osc} .

$$|\gamma\tau_{\text{osc}}| > 1, \quad (11.12)$$

$$|\nu_{\text{coll}}\tau_{\text{osc}}| > 1. \quad (11.13)$$

С другой стороны, предполагалось, что частицы бесстолкновительны. Для того чтобы можно было воспользоваться асимптотическим выражением интеграла (11.9) при $t \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы время до столкновения $1/\nu_{\text{coll}}$ было больше, чем λ/v_{rms} , где λ — длина волны, а v_{rms} — разброс распределения по скоростям:

$$\frac{1}{\nu_{\text{coll}}} > \frac{2\pi}{kv_{\text{rms}}}. \quad (11.14)$$

§ 11.2. Времяпролетное затухание

Мы уже описали свойства альфвеновских волн в холодной плазме, где существуют компрессионная и крутильная моды (соответственно, волны сжатия и кручения — см. примечание к разд. 5.4). В горячей плазме компрессионная мода (волна сжатия) переходит в магнитозвуковую, как описано в гл. 5. В низкочастотной области магнитный момент μ_m сохраняется, и уравнение движения вдоль силовых линий имеет вид

$$m \frac{dv_z}{dt} = -\mu_m \frac{\partial B_{1z}}{\partial z}. \quad (11.15)$$

Это уравнение совпадает с соответствующим уравнением для затухания Ландау, если заменить $-\mu_m$ и $\partial B_{1z}/\partial z$ на электрический заряд и электрическое поле, соответственно. Скорость

изменения кинетической энергии выводится аналогично и имеет вид

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \right\rangle_{z_0, v_0} = -\frac{\pi \mu_m^2 |k|}{2m} |B_{1z}|^2 \left(\frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{\partial f(v_0)}{\partial v_0} \right)_{v_0=\omega/k}. \quad (11.16)$$

Это явление называется *временнoлетным (transit-time) затуханием*¹⁾.

§ 11.3. Циклотронное затухание

Механизм циклотронного затухания отличен от механизма затухания Ландау. Здесь электрическое поле волны перпендикулярно направлению магнитного поля и дрейфу частицы и ускоряет частицу перпендикулярно направлению дрейфа. Рассмотрим простой случай, в котором тепловая энергия движения частиц, перпендикулярного магнитному полю, равна нулю, а скорость частиц, параллельная магнитному полю $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$, равна V . Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + mV \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = q(\mathbf{E}_\perp + \mathbf{v} \times \hat{\mathbf{z}} B_0 + V \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}_1). \quad (11.17)$$

Поскольку нас интересует ускорение перпендикулярно полю, положим $(\mathbf{E}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}}) = 0$. \mathbf{B}_1 дается выражением $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega$. Введем $v^\pm = v_x \pm i v_y$, и $E^\pm = E_x \pm i E_y$. Решение с начальным условием $\mathbf{v} = 0$ при $t = 0$ имеет вид

$$v^\pm = \frac{iqE^\pm(\omega - kV) \exp(ikz - i\omega t)}{m\omega} \frac{1 - \exp(i\omega t - ikVt \pm i\Omega t)}{\omega - kV \pm \Omega}, \quad (11.18)$$

$$\Omega = \frac{-qB_0}{m}.$$

Макроскопическое значение \mathbf{v}_\perp получается путем усреднения по функции распределения $f_0(V)$:

$$\langle \mathbf{v}_\perp \rangle = \frac{iq \exp(ikz - i\omega t)}{2m} ((c^+ + c^-) \mathbf{E}_\perp + i(c^+ - c^-) \mathbf{E}_\perp \times \hat{\mathbf{z}}), \quad (11.19)$$

$$c^\pm = \alpha^\pm - i\beta^\pm, \quad (11.20)$$

¹⁾ Разумеется, частицы обмениваются энергией не с магнитным, а с электрическим полем волны. При этом, хотя изменяется «продольная» энергия, взаимодействие происходит с «поперечными» по отношению к магнитному полю компонентами электрического поля E_x , E_y (см., например, Тимофеев А. В. Физика плазмы. 2004. Т. 30. С. 795). — *Примеч. ред.*

$$\alpha^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{f_0(V)(1 - kV/\omega)(1 - \cos(\omega - kV \pm \Omega)t)}{\omega - kV \pm \Omega}, \quad (11.21)$$

$$\beta^{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{f_0(V)(1 - kV/\omega) \sin(\omega - kV \pm \Omega)t}{\omega - kV \pm \Omega}. \quad (11.22)$$

При больших t

$$\alpha^{\pm} \rightarrow P \int_{-\infty}^{\infty} dV \frac{f_0(V)(1 - kV/\omega)}{\omega - kV \pm \Omega}, \quad (11.23)$$

$$\beta^{\pm} \rightarrow \frac{\mp \pi \Omega}{\omega |k|} f_0\left(\frac{\omega \pm \Omega}{k}\right). \quad (11.24)$$

Приближения (11.19)–(11.24) оправданы, когда

$$t \gg \frac{2\pi}{kV_{\text{rms}}}, \quad (11.25)$$

где $V_{\text{rms}} = \langle V^2 \rangle^{1/2}$ есть разброс распределения по скоростям. Поглощение энергии волны частицами плазмы дается выражением

$$\begin{aligned} & \langle \text{Re}(q\mathbf{E} \exp(ikz - i\omega t))(\text{Re}(\mathbf{v}_{\perp})) \rangle_z = \\ & = \frac{q^2}{4m} (\beta^+ |E_x + iE_y|^2 + \beta^- |E_x - iE_y|^2). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Рассмотрим случай электронов ($\Omega_e > 0$). Как было описано в разд. 10.2, волна $N^2 = R$, распространяющаяся в направлении магнитного поля ($\theta = 0$), удовлетворяет уравнению $E_x + iE_y = 0$, так что поглощенная мощность равна

$$P_e = \frac{q^2}{4m} \beta^- |E_x - iE_y|^2.$$

Когда $\omega > 0$, формула (11.24) означает, что $\beta^- > 0$. В случае $\omega < 0$ величина β^- близка к нулю, т. к. $f_0((\omega - \Omega_e)/k) \ll 1$.

Рассмотрим случай ионов ($-\Omega_i > 0$). Подобным же образом находим

$$P_i = \frac{q^2}{4m} \beta^+ |E_x + iE_y|^2.$$

Когда $\omega > 0$, (11.24) означает $\beta^+ > 0$. В случае $\omega < 0$ величина β^+ близка к нулю, т. к. $f_0(\omega + \Omega_i/k) \ll 1$.

Циклотронная скорость V_c определяется таким образом, что частота волны с доплеровским сдвигом (частота волны, которую

чувствует частица, движущаяся со скоростью V) равна циклотронной частоте, т. е.

$$\begin{aligned}\omega - kV_c \pm \Omega &= 0, \\ V_c &= \frac{\omega}{k} \left(1 \pm \frac{\Omega}{\omega} \right).\end{aligned}$$

Соответственно частицы поглощают энергию волны, когда абсолютное значение циклотронной скорости меньше, чем абсолютное значение фазовой скорости волны ($\pm\Omega/\omega < 0$) — см. (11.24). Это явление называют *циклотронным затуханием*.

Рассмотрим изменение кинетической энергии частиц в случае циклотронного затухания. Уравнение движения имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) = q\mathbf{E}_\perp + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1).$$

Так как $\mathbf{B}_1 = (\mathbf{k} \times \mathbf{E})/\omega$ и $E_z = 0$, имеем

$$\begin{aligned}m \frac{dv_z}{dt} &= \frac{qk_z}{\omega} (\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp), \\ m \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} - q(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_0) &= q\mathbf{E}_\perp \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right),\end{aligned}$$

так что

$$m\mathbf{v}_\perp \cdot \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q(\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp) \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{mv_z^2}{2} \right) &= \frac{k_z v_z}{\omega - k_z v_z} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_\perp^2}{2} \right), \\ v_\perp^2 + \left(v_z - \frac{\omega}{k_z} \right)^2 &= \text{const.}\end{aligned}$$

При анализе циклотронного затухания мы полагали, что скорость $v_z = V$ постоянна; условие справедливости линеаризованной теории имеет вид [3]

$$\frac{k_z^2 q^2 E_\perp^2 |\omega - k_z v_z| t^3}{24\omega^2 m^2} < 1.$$

Мы рассмотрели случай, когда поперечная тепловая энергия равна нулю. Если эта энергия больше, чем тепловая энергия движения частиц вдоль магнитного поля, может возникнуть так называемая циклотронная неустойчивость. Взаимодействие между частицами и волной будет еще обсуждаться в гл. 12 и 13 в связи с нагревом и неустойчивостями.

§ 11.4. Квазилинейная теория эволюции функции распределения

До сих пор предполагалось, что возмущение мало, и члены нулевого порядка не изменяются. В этом предположении анализируются уравнения, линеаризованные по возмущениям. Однако, если возмущения нарастают, то величины нулевого порядка могут измениться, а инкремент возмущений может изменяться из-за эволюции величин нулевого порядка. В конце концов возмущения насыщаются (инкремент обращается в нуль) и переходят в стационарные. Рассмотрим простой случай с $\mathbf{V} = 0$ и одномерным электростатическим возмущением ($\mathbf{B}_1 = 0$). Ионы распределены однородно. Тогда функция распределения $f(x, v, t)$ электронов подчиняется уравнению Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (11.27)$$

Разделим функцию распределения f на две части:

$$f(x, v, t) = f_0(v, t) + f_1(x, v, t), \quad (11.28)$$

где f_0 — медленно меняющийся член нулевого порядка, а f_1 — осциллирующий член первого порядка. Предполагается, что производная по времени f_0 имеет второй порядок малости. Если (11.28) подставить в (11.27), получаем, что первый и второй члены удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (11.29)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m} E \frac{\partial f_1}{\partial v}. \quad (11.30)$$

f_1 и E можно представить в виде интегралов Фурье

$$f_1(x, v, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int f_k(v) \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk, \quad (11.31)$$

$$E(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int E_k \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk. \quad (11.32)$$

Так как f_1 и E действительны, то $f_{-k} = f_k^*$, $E_{-k} = E_k^*$, $\omega(-k) = -\omega^*(k)$ ($\omega(k) = \omega_r(k) + i\gamma(k)$). Подстановка (11.31), (11.32) в (11.29) дает

$$f_k(v) = \frac{e}{m} \left(\frac{i}{\omega(k) - kv} \right) E_k \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (11.33)$$

Если (11.32), (11.33) подставить в (11.30), получим

$$\frac{\partial f_0(v, t)}{\partial t} = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{1}{2\pi} \int E_{k'} \exp(i(k'x - \omega(k')t)) dk' \times \right. \\ \left. \times \frac{i}{\omega(k) - kv} E_k \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v} \exp(i(kx - \omega(k)t)) dk \right\rangle. \quad (11.34)$$

Статистическое усреднение (11.34) (интегрирование по x) приводит к уравнению

$$\frac{\partial f_0(v, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(D_v(v) \frac{\partial f_0(v, t)}{\partial v} \right), \quad (11.35)$$

$$D_v(v) = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i|E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t)}{\omega_r(k) - kv + i\gamma(k)} dk = \\ = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(k)|E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t)}{(\omega_r(k) - kv)^2 + \gamma(k)^2} dk.$$

Когда $|\gamma(k)| \ll |\omega_r(k)|$, коэффициент диффузии в пространстве скоростей имеет вид

$$D_v(v) = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \pi \int |E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t) \delta(\omega_r(k) - kv) dk = \\ = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{\pi}{|v|} |E_k|^2 \exp(2\gamma(k)t) \Big|_{\omega/k=v}. \quad (11.36)$$

Уравнение Пуассона

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_1 dv,$$

даёт

$$ikE_k = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f_k dv,$$

и с использованием (11.33) получается дисперсионное соотношение

$$1 + \frac{\Pi_e^2}{k} \frac{1}{n} \int \left(\frac{1}{\omega(k) - kv} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = 0. \quad (11.37)$$

В предположении $|\gamma| \ll |\omega_r|$ ($\omega = \omega_r + i\gamma$) решение (11.37) для γ дается выражением (11.11).

Уравнение (11.35) представляет собой уравнение диффузии в пространстве скоростей. Если функция распределения элек-

тронов имеет форму, показанную на рис. 11.2, б, то существует положительная производная $v \partial f / \partial v > 0$ вблизи $v_1 = \omega/k$. Тогда волны нарастают вследствие усиления Ландау, и амплитуда $|E_k|$ увеличивается. Коэффициент диффузии D_v в пространстве скоростей становится большим, и возникает аномальная диффузия в пространстве скоростей. Положительная производная $\partial f / \partial v$ вблизи $v \approx v_1$ уменьшается, и в конце концов профиль функции распределения вблизи $v \approx v_1$ становится плоским.

Рассмотрим другой случай. Если волна возбуждается извне (антенной) в плазме с максвелловской функцией распределения, показанной на рис. 11.2, а, коэффициент диффузии D_v при $v = \omega/k$ увеличивается. Функция распределения около $v = \omega/k$ становится плоской, как можно видеть на рис. 16.18 из гл. 16.

Список литературы

1. Ландау Л. Д. ЖЭТФ, 1946. Т. 10. С. 574.
2. Malmberg J. H., Wharton C. B., Drummond W. E. Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research (Conf. Proceedings, Culham, 1965). IAEA, Vienna. 1966. V. 1. P. 485.
3. Stix T. H. The Theory of Plasma Waves. — N. Y.: McGraw-Hill, 1962 (русский перевод: Стукс Т. Теория плазменных волн. — М.: Атомиздат, 1965); Stix T. H. Waves in Plasmas. — N. Y.: American Institute of Physics, 1992.

Глава 12

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН И ВОЛНОВОЙ НАГРЕВ

Нагрев в диапазоне ионной циклотронной частоты (ИЦН), нижегибридный нагрев (НГН), электронный циклотронный нагрев (ЭЦН) и другие виды нагрева плазмы активно исследуются в настоящее время. Как правило, мощные источники высокочастотных волн создать легче, чем источники пучков для нагрева инжекцией нейтральных пучков (ИНП). Важно также, что хотя механизм нагрева с помощью ИНП легко объясняется классическим процессом кулоновских столкновений (см. разд. 2.6), а физические процессы при волновом нагреве сложны, взаимодействие волн и плазмы обладает большим разнообразием, так что возможны его различные применения в зависимости от развития систем нагрева.

Волны возбуждаются в плазме антеннами или волноводами, расположенными вне плазмы. Если электрическое поле возбуждаемой волны параллельно удерживающему плазму магнитному полю, электроны могут двигаться вдоль магнитного поля и нейтрализовать электрическое поле. Но если при этом частота волны превышает электронную плазменную частоту, электроны не успевают отслеживать изменения электрического поля, и волна распространяется в плазме. Если же электрическое поле возбуждаемой волны перпендикулярно магнитному полю, электроны движутся в направлении $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (при условии $\omega < \Omega_e$) и, таким образом, они не могут скомпенсировать электрическое поле. В этом случае волна может распространяться в плазме, даже если ее частота меньше плазменной. Возбуждение состоит в накачке высокочастотной электромагнитной волны в плазме посредством системы связи между генерирующим устройством и плазмой. Если структура системы связи имеет такой же период, как собственная мода, волна будет возбуждаться резонансным образом. За исключением такого *резонансного возбуждения* эффективность возбуждения волны как правило невысока.

Нейтральные пучки и электронные циклотронные волны могут быть запущены из вакуума; они проникают в плазму без ослабления или иного взаимодействия с поверхностью плазмы. При этом возбуждающие структуры не обязаны располагаться вблизи плазмы и обладают тем преимуществом, что не подвергаются тепловым нагрузкам и эрозии под действием плазмы.

В некоторых случаях возбуждаемые волны могут распространяться и проходить через центральную часть плазмы без затухания (не приводя к нагреву), они могут преломляться и в результате возвращаться во внешнюю область, не проходя через центр плазмы, они могут, наконец, отразиться от зоны отсечки (см. рис. 12.1). Волна может трансформироваться в другой тип волны (явление *трансформации мод*).



Рис. 12.1. Прохождение, рефракция и отражение, поглощение вблизи границы и поглощение внутри плазмы

Распространяясь в плазме, волны затухают и поглощаются там, где происходит затухание Ландау или циклотронное затухание, тем самым они нагревают плазму. Таким образом, для нагрева центральной части объема плазмы волны должны проникнуть в нее без поглощения и поглотиться, лишь достигнув центральной части плазмы (*волновой нагрев*).

§ 12.1. Поток энергии

Перенос энергии и распространение волн в плазменной среде очень важны для волнового нагрева плазмы. Уравнение для потока энергии получается, если взять разность между скалярным произведением \mathbf{H} на (10.15) и скалярным произведением \mathbf{E} на (10.16):

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (12.1)$$

Вектор $\mathbf{P} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ называется *вектором Пойнтинга* и представляет собой плотность потока энергии электромагнитного поля. Уравнение Пойнтинга (в форме (12.1)) не учитывает действия электрического сопротивления, возникающего в результате электрон-ионных столкновений.

Плазма — среда, обладающая дисперсией, и тензор диэлектрической проницаемости зависит от волнового вектора \mathbf{k} и частоты ω . Обозначим символами $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}, t)$ фурье-компоненты $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ соответственно:

$$\mathbf{D}_\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) d\mathbf{r} dt,$$

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) d\mathbf{r} dt.$$

Между ними существует соотношение

$$\mathbf{D}_\omega(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_\omega(\mathbf{k}, \omega),$$

так что

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \epsilon_0 \int \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}_\omega(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) d\mathbf{k} d\omega, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathbf{E}_\omega(\mathbf{k}, \omega) \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) d\mathbf{k} d\omega. \end{aligned}$$

Из определения интеграла Фурье получается уравнение

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int \widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' dt',$$

где $\widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t)$ определяется формулой

$$\widehat{\mathbf{K}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) d\mathbf{k} d\omega.$$

Анализ электромагнитных полей общего вида в диспергирующей среде не прост. Однако если электрическое поле содержит фурье-компоненты из узкого интервала (\mathbf{k}, ω) и \mathbf{K} слабо изменяется при изменении \mathbf{k}, ω , то мы можем использовать соотношение

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Далее мы будем рассматривать именно этот простой случай. Связь между магнитной индукцией \mathbf{B} и напряженностью магнитного поля \mathbf{H} в плазме имеет вид

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Квазипериодические функции A, B можно записать в форме

$$\begin{aligned} A &= A_0 \exp \left(-i \int_{-\infty}^t (\omega_r + i\omega_i) dt' \right) = A_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i), \\ B &= B_0 \exp \left(-i \int_{-\infty}^t (\omega_r + i\omega_i) dt' \right) = B_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i), \end{aligned}$$

где ϕ_r и ϕ_i действительны. Усредненное произведение \overline{AB} действительных частей A и B определяется формулой

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \langle (A_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i) + A_0^* \exp(i\phi_r + \phi_i)) \times \\ &\quad \times (B_0 \exp(-i\phi_r + \phi_i) + B_0^* \exp(i\phi_r + \phi_i)) \rangle \\ &= \frac{1}{4} (A_0 B_0^* + A_0^* B_0) \exp(2\phi_i) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(AB^*). \quad (12.2)\end{aligned}$$

Усреднение уравнения Пойнтинга дает

$$\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \quad (12.3)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{B}_0^*) \exp 2 \int_{-\infty}^t \omega_i dt', \quad (12.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left(\frac{\mathbf{B}^*}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) + \epsilon_0 \mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(-i\omega \frac{\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} + \epsilon_0 (-i\omega) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_i \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*}{\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} (\omega_i \operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) + \omega_r \operatorname{Im}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E})). \quad (12.5)\end{aligned}$$

Из соотношений

$$\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E} = \sum_i E_i^* \sum_j K_{ij} E_j,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{E}^* &= \sum_i E_i \sum_j K_{ij}^* E_j^* = \sum_j E_j^* \sum_i (K_{ji}^T)^* E_i = \\ &= \sum_i E_i^* \sum_j (K_{ij}^T)^* E_j\end{aligned}$$

находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) &= \mathbf{E}^* \cdot \frac{\mathbf{K} + (\mathbf{K}^T)^*}{2} \cdot \mathbf{E}, \\ \operatorname{Im}(\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}) &= \mathbf{E}^* \cdot \frac{(-i)[\mathbf{K} - (\mathbf{K}^T)^*]}{2} \cdot \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Здесь $(\mathbf{K}^T)^*$ — комплексное сопряжение матрицы \mathbf{K}^T , полученной транспонированием \mathbf{K} (строки и столбцы меняются местами), т. е. $K_{ij}^T \equiv K_{ji}$. Если матрица \mathbf{M} оказывается равной $(\mathbf{M}^T)^*$, то такая матрица называется *эрмитовой матрицей*. Для

эрмитовой матрицы ($\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}$) всегда действительно. Диэлектрический тензор может быть разложен следующим образом:

$$\mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega) = \mathbf{K}_H(\mathbf{k}, \omega) + i\mathbf{K}_I(\mathbf{k}, \omega).$$

Как показано в разд. 12.3, \mathbf{K}_H и \mathbf{K}_I эрмитовы, если \mathbf{k} , ω действительны. Будет доказано также, что член $i\mathbf{K}_I$ соответствует затуханию Ландау и циклотронному затуханию. Если мнимая часть ω гораздо меньше, чем действительная часть ($\omega = \omega_r + i\omega_i$, $|\omega_i| \ll |\omega_r|$), мы можем написать

$$\mathbf{K}(\mathbf{k}, \omega_r + i\omega_i) \approx \mathbf{K}_H(\mathbf{k}, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega_r} \mathbf{K}_H(\mathbf{k}, \omega_r) + i\mathbf{K}_I(\mathbf{k}, \omega_r).$$

Обозначим эрмитову компоненту W (член, связанный с \mathbf{K}_H , в W) как W_0 . Эта величина определяется выражением

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{K}_H \cdot \mathbf{E}_0 + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_0^* \cdot \left(\omega_r \frac{\partial}{\partial \omega_r} \mathbf{K}_H \right) \cdot \mathbf{E}_0 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\mathbf{B}_0^* \cdot \mathbf{B}_0}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}_0^* \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \mathbf{K}_H) \right) \cdot \mathbf{E}_0 \right), \quad (12.6) \end{aligned}$$

а (12.3), (12.5) дают

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = -\omega_r \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{E}_0 - \nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (12.7)$$

Первый член в (12.6) представляет собой плотность энергии магнитного поля, а второй член — плотность энергии электрического поля вместе с кинетической энергией когерентного движения частиц в волне. Уравнение (12.6) определяет плотность энергии волны в диспергирующей среде. Первый член в правой части (12.7) описывает затухание Ландау и циклотронное затухание, а второй член представляет собой дивергенцию потока энергии волны.

Рассмотрим скорость волнового пакета

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{k}) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t) d\mathbf{k} \quad (12.8)$$

с заданным дисперсионным соотношением

$$\omega = \omega(\mathbf{k}).$$

Если $f(\mathbf{k})$ изменяется слабо, положение максимума $F(\mathbf{r}, t)$ есть точка стационарной фазы

$$\frac{\partial}{\partial k_i} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t) = 0 \quad (i = x, y, z)$$

(см. рис. 12.2). Следовательно, скорость перемещения максимума имеет вид

$$\left(\frac{x}{t} = \frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial k_x}, \frac{y}{t} = \frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial k_y}, \frac{z}{t} = \frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial k_z} \right),$$

или

$$\mathbf{v}_g = \left(\frac{\partial\omega}{\partial k_x}, \frac{\partial\omega}{\partial k_y}, \frac{\partial\omega}{\partial k_z} \right). \quad (12.9)$$

Эта скорость называется *групповой скоростью* и представляет собой скорость потока энергии.

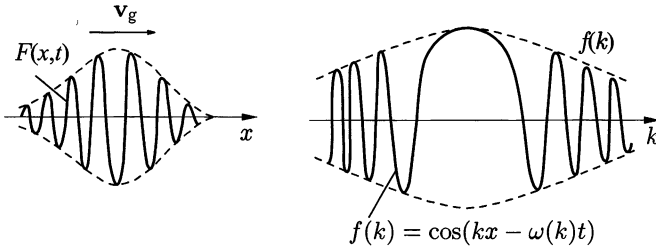


Рис. 12.2. $F(x, t)$ и $f(k) \cos(kx - \omega(k)t)$

§ 12.2. Приближение геометрической оптики

Когда длина волны в плазме гораздо меньше, чем характерная длина (обычно малый радиус a), можно использовать ВКБ приближение (приближение геометрической оптики). Пусть дисперсионное соотношение имеет вид $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$. Направление потока энергии задается групповой скоростью $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k} \equiv (\partial\omega/\partial k_x, \partial\omega/\partial k_y, \partial\omega/\partial k_z)$, так что оптический луч может быть задан уравнением $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}_g$. Хотя величины (\mathbf{k}, ω) изменяются в соответствии с изменением \mathbf{r} , они всегда удовлетворяют уравнению $D = 0$. Оптический луч может быть задан уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{ds} = -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}}, \quad (12.10)$$

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{\partial D}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{ds} = \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (12.11)$$

Здесь s — длина вдоль оптического луча. Вдоль луча изменение δD обращается в нуль

$$\delta D = \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} \cdot \delta \mathbf{k} + \frac{\partial D}{\partial \omega} \cdot \delta \omega + \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial D}{\partial t} \cdot \delta t = 0, \quad (12.12)$$

и выполняется равенство $D(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}, t) = 0$. Уравнения (12.10), (12.11) сводятся к

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \right)^{-1} = -\frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} \left(\frac{\partial D}{\partial \omega} \right)^{-1} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \right)_{\mathbf{r}, t = \text{const.}} = \mathbf{v}_g.$$

Уравнения (12.10) имеют тот же вид, что уравнения движения с гамильтонианом D . Если D не зависит явно от t , уравнение $D = \text{const} = 0$ соответствует закону сохранения энергии. Если свойства плазменной среды не зависят от z , равенство $k_z = \text{const}$ соответствует закону сохранения количества движения, и аналогично закону Снеллиуса в оптике $N_{\parallel} = \text{const}$.

Если $\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i$ представляет решение $D = 0$ при заданном действительном ω и выполнено условие $|\mathbf{k}_i| \ll |\mathbf{k}_r|$, имеем

$$D(\mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i, \omega) = \text{Re } D(\mathbf{k}_r, \omega) + \frac{\partial \text{Re } D(\mathbf{k}_r, \omega)}{\partial \mathbf{k}_r} \cdot i\mathbf{k}_i + i \text{Im } D(\mathbf{k}_r, \omega) = 0.$$

Далее это приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \text{Re } D(\mathbf{k}_r, \omega) &= 0, \\ \mathbf{k}_i \cdot \frac{\partial \text{Re } D(\mathbf{k}_r, \omega)}{\partial \mathbf{k}_r} &= -\text{Im } D(\mathbf{k}_r, \omega). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Тогда для интенсивности волны $I(\mathbf{r})$ получаем

$$I(\mathbf{r}) = I(\mathbf{r}_0) \exp \left(-2 \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{k}_i d\mathbf{r} \right), \quad (12.14)$$

$$\int \mathbf{k}_i d\mathbf{r} = \int \mathbf{k}_i \cdot \frac{\partial D}{\partial \mathbf{k}} ds = - \int \text{Im } D(\mathbf{k}_r, \omega) ds = - \int \frac{\text{Im } D(\mathbf{k}_r, \omega)}{|\partial D / \partial \mathbf{k}|} dl, \quad (12.15)$$

где dl — элемент длины вдоль оптического луча. Поглощение волны можно определить из (12.14) и (12.15), проследив за достаточно большим числом оптических лучей. Приближение геометрической оптики позволяет определить среднюю интенсивность волны с пространственным разрешением, скажем, в две или три длины волны.

§ 12.3. Тензор диэлектрической проницаемости, поглощение волн и нагрев

В процессах поглощения волн горячей плазмой основную роль играет затухание Ландау или циклотронное затухание, как говорилось в гл. 11. Поглощение происходит благодаря взаи-

модействию между волной и так называемыми *резонансными частицами*, удовлетворяющими условию

$$\omega - k_z v_z - n\Omega = 0. \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В системе координат, движущейся с этой скоростью, электрическое поле статическое ($\omega = 0$) или имеет частоту циклотронной гармоники ($\omega = n\Omega$). Случай $n = 0$ соответствует затуханию Ландау, случай $n = 1$ отвечает электронному циклотронному затуханию, а случай $n = -1$ — ионному циклотронному затуханию (предполагается $\omega > 0$).

Хотя во многих случаях процессы нагрева сопровождаются нелинейными и стохастическими процессами, экспериментальные результаты волнового нагрева или поглощения волн обычно могут быть хорошо описаны линейной или квазилинейной теорией. Основой линейной теории является дисперсионное соотношение с диэлектрическим тензором \mathbf{K} плазмы конечной температуры. Поглощенная в единице объема плазмы мощность P^{ab} дается первым членом в правой части (12.7)

$$P^{ab} = \omega_r \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{K}_I \cdot \mathbf{E}.$$

Так как, как будет показано позже в этом разделе, \mathbf{K}_H , \mathbf{K}_I — эрмитовы матрицы при действительных \mathbf{k} , ω поглощенная мощность P^{ab} определяется выражением

$$P^{ab} = \omega_r \left(\frac{\epsilon_0}{2} \right) \operatorname{Re} (\mathbf{E}^* \cdot (-i)\mathbf{K} \cdot \mathbf{E})_{\omega=\omega_r}. \quad (12.16)$$

Как ясно из выражения (12.19) для \mathbf{K} , поглощенная мощность P^{ab} выражается в виде

$$P^{ab} = \omega \frac{\epsilon_0}{2} (|E_x|^2 \operatorname{Im} K_{xx} + |E_y|^2 \operatorname{Im} K_{yy} + |E_z|^2 \operatorname{Im} K_{zz} + 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_y) \operatorname{Re} K_{xy} + 2 \operatorname{Im}(E_y^* E_z) \operatorname{Re} K_{yz} + 2 \operatorname{Im}(E_x^* E_z) \operatorname{Re} K_{xz}). \quad (12.17)$$

Так как из (10.3) следует $\mathbf{j} = -i\omega\mathbf{P} = -i\epsilon_0\omega(\mathbf{K} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}$, величина (12.16) может быть записана как

$$P^{ab} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{j})_{\omega=\omega_r}. \quad (12.18)$$

Процедура вывода диэлектрического тензора \mathbf{K} для плазмы с конечной температурой описана в Приложении С. Если плазма би-максвелловская,

$$f_0(v_\perp, v_z) = n_0 F_\perp(v_\perp) F_z(v_z),$$

$$F_{\perp}(v_{\perp}) = \frac{m}{2\pi\kappa T_{\perp}} \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2\kappa T_{\perp}}\right),$$

$$F_z(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_z}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m(v_z - V)^2}{2\kappa T_z}\right),$$

диэлектрический тензор \mathbf{K} дается формулой

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left[\sum_n \left(\zeta_0 Z(\zeta_n) - \left(1 - \frac{1}{\lambda_T}\right) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) e^{-b} \mathbf{X}_n + 2\eta_0^2 \lambda_T \mathbf{L} \right], \quad (12.19)$$

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} n^2 I_n / b & in(I'_n - I_n) & -(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{\alpha} I_n \\ -in(I'_n - I_n) & (n^2/b + 2b)I_n - 2bI'_n & i(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \alpha (I'_n - I_n) \\ -(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{\alpha} I_n & -i(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \alpha (I'_n - I_n) & 2\lambda_T \eta_n^2 I_n \end{bmatrix}, \quad (12.20)$$

где

$$Z(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\beta^2)}{\beta - \zeta} d\beta,$$

$I_n(b)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка,

$$\eta_n \equiv \frac{\omega + n\Omega}{2^{1/2} k_z v_{Tz}}, \quad \zeta_n \equiv \frac{\omega - k_z V + n\Omega}{2^{1/2} k_z v_{Tz}},$$

$$\lambda_T \equiv \frac{T_z}{T_{\perp}}, \quad b \equiv \left(\frac{k_x v_{T\perp}}{\Omega}\right)^2, \quad \alpha \equiv b^{1/2},$$

$$v_{Tz}^2 \equiv \frac{\kappa T_z}{m}, \quad v_{T\perp}^2 \equiv \frac{\kappa T_{\perp}}{m}.$$

Элементы матрицы \mathbf{L} равны нулю за исключением $L_{zz} = 1$.

Если плазма изотропная и максвелловская ($T_z = T_{\perp}$), а $V = 0$, то $\eta_n = \zeta_n$, а $\lambda_T = 1$, и (12.19) сводится к

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta_0 Z(\zeta_n) e^{-b} \mathbf{X}_n + 2\zeta_0^2 \mathbf{L} \right]. \quad (12.21)$$

$Z(\zeta)$ называется *плазменной дисперсионной функцией*. Если мнимая часть $\text{Im} \omega$ частоты ω по величине меньше, чем действи-

тельная часть $\text{Re } \omega$ ($|\text{Im } \omega| < |\text{Re } \omega|$), мнимая часть плазменной дисперсионной функции имеет вид

$$\text{Im } Z(\zeta) = i \frac{k_z}{|k_z|} \pi^{1/2} \exp(-\zeta^2).$$

Действительная часть $\text{Re } Z(x)$ (x действительно) показана на рис. 12.3. Действительная часть $Z(x)$ равна

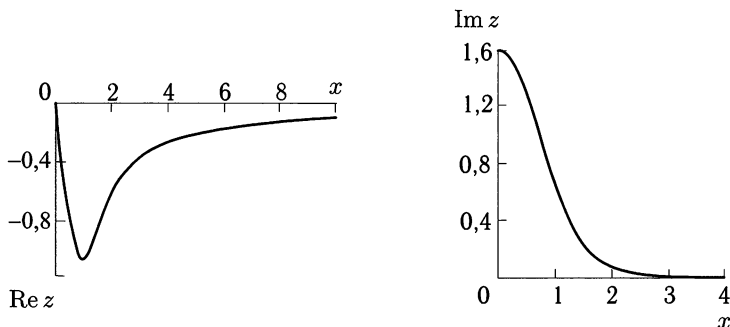


Рис. 12.3. Действительная $\text{Re } Z$ и мнимая $\text{Im } Z$ часть функции $Z(x)$

$$\text{Re } Z(x) = -2x(1 - (2/3)x^2 + \dots)$$

в случае $x \ll 1$ (случай горячей плазмы) и

$$\text{Re } Z(x) = -x^{-1}(1 + (1/2)x^{-2} + (3/4)x^{-4} + \dots)$$

в случае $x \gg 1$ (случай холодной плазмы) [1, 2, 3]. Мнимая часть $Z(\zeta)$ содержит слагаемые, связанные с затуханием Ландау и с циклотронным затуханием, как показано ниже в этом разделе.

При $T \rightarrow 0$, т. е. $\zeta_n \rightarrow \pm\infty$, $b \rightarrow 0$, диэлектрический тензор горячей плазмы сводится к диэлектрическому тензору (10.9)–(10.13) холодной плазмы.

В случае $b = (k_x \rho_\Omega)^2 \ll 1$ ($\rho_\Omega = v_{T\perp}/\Omega$ — ларморовский радиус) можно разложить $e^{-b} \mathbf{X}_n$ по b , используя

$$\begin{aligned} I_n(b) &= \left(\frac{b}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(n+l)!} \left(\frac{b}{2}\right)^{2l} = \\ &= \left(\frac{b}{2}\right)^n \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{1!(n+1)!} \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(n+2)!} \left(\frac{b}{2}\right)^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

Разложение по b и учет членов вплоть до второй гармоники в \mathbf{K} дает

$$K_{xx} = 1 + \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 \left((Z_1 + Z_{-1}) \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{2} + \dots \right) + \right. \\ \left. + (Z_2 + Z_{-2}) \left(\frac{b}{2} - \frac{b^2}{2} + \dots \right) + \dots \right)_j,$$

$$K_{yy} = 1 + \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 (Z_0(2b + \dots) + \\ + (Z_1 + Z_{-1}) \left(\frac{1}{2} - \frac{3b}{2} + \dots \right) + \\ + (Z_2 + Z_{-2}) \left(\frac{b}{2} - b^2 + \dots \right) + \dots)_j,$$

$$K_{zz} = 1 - \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 \left(2\zeta_0 W_0(1 - b + \dots) + \right. \\ \left. + (\zeta_1 W_1 + \zeta_{-1} W_{-1})(b + \dots) + \right. \\ \left. + (\zeta_2 W_2 + \zeta_{-2} W_{-2}) \left(\frac{b^2}{4} + \dots \right) + \dots \right)_j,$$

$$K_{xy} = i \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 \zeta_0 \left((Z_1 - Z_{-1}) \left(\frac{1}{2} - b + \dots \right) + \right. \\ \left. + (Z_2 - Z_{-2}) \left(\frac{b}{2} + \dots \right) + \dots \right)_j,$$

$$K_{xz} = 2^{1/2} \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 b^{1/2} \zeta_0 \left((W_1 - W_{-1}) \left(\frac{1}{2} + \dots \right) + \right. \\ \left. + (W_2 - W_{-2}) \left(\frac{b}{4} + \dots \right) + \dots \right)_j,$$

$$K_{yz} = -2^{1/2} i \sum_j \left(\frac{\Pi_j}{\omega} \right)^2 b^{1/2} \zeta_0 \left(W_0 \left(-1 + \frac{3}{2} b + \dots \right) + \right. \\ \left. + (W_1 + W_{-1}) \left(\frac{1}{2} + \dots \right) + \right. \\ \left. + (W_2 - W_{-2}) \left(\frac{b}{4} + \dots \right) + \dots \right)_j, \quad (12.22)$$

$$K_{yx} = -K_{xy}, \quad K_{zx} = K_{xz}, \quad K_{zy} = -K_{yz},$$

где

$$Z_{\pm n} \equiv Z(\zeta_{\pm n}), \quad W_n \equiv -(1 + \zeta_n Z(\zeta_n)), \\ \zeta_n = (\omega + n\Omega)/(2^{1/2}k_z(\kappa T_z/m)^{1/2}).$$

Если $x \gg 1$, выражение для $\text{Re } W(x)$ имеет вид

$$\text{Re } W(x) = (1/2)x^{-2}(1 + (3/2)x^{-2} + \dots).$$

Мощность, поглощенная благодаря затуханию Ландау (включая времяпролетное затухание), может быть получена из слагаемых, связанных с мнимой частью G_0 величины $\zeta_0 Z(\zeta_0)$ в выражениях (12.22) для K_{ij} ,

$$G_0 \equiv \text{Im } \zeta_0 Z(\zeta_0) = \frac{k_z}{|k_z|} \pi^{1/2} \zeta_0 \exp(-\zeta_0^2).$$

Так как

$$(\text{Im } K_{yy})_0 = \left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 2bG_0, \\ (\text{Im } K_{zz})_0 = \left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 2\zeta_0^2 G_0, \\ (\text{Re } K_{yz})_0 = \left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 2^{1/2} b^{1/2} \zeta_0 G_0,$$

вклад этих членов в поглощенную мощность (12.17) принимает вид

$$P_0^{\text{ab}} = 2\omega \left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 G_0 \times \\ \times \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right) \left(|E_y|^2 b + b + |E_z|^2 \zeta_0^2 + \text{Im}(E_y^* E_z)(2b)^{1/2} \zeta_0\right). \quad (12.23)$$

Первое слагаемое представляет собой времяпролетное затухание и равно (11.16). Второе слагаемое соответствует затуханию Ландау и эквивалентно (11.10). Третье слагаемое представляет собой интерференцию обоих эффектов.

Мощность, поглощаемая благодаря циклотронному затуханию и затуханию на гармониках циклотронной частоты, получается из вклада членов

$$G_{\pm n} \equiv \text{Im } \zeta_0 Z_{\pm n} = \frac{k_z}{|k_z|} \pi^{1/2} \zeta_0 \exp(-\zeta_{\pm n}^2),$$

и в случае $b \ll 1$

$$\begin{aligned}
 (\operatorname{Im} K_{xx})_{\pm n} &= (\operatorname{Im} K_{yy})_{\pm n} = \left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 G_{\pm n} \alpha_n, \\
 (\operatorname{Im} K_{zz})_{\pm n} &= \left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 2\zeta_{\pm n}^2 G_{\pm n} b \alpha_n n^{-2}, \\
 (\operatorname{Re} K_{xy})_{\pm n} &= -\left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 G_{\pm n} (\pm \alpha_n), \\
 (\operatorname{Re} K_{yz})_{\pm n} &= -\left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 (2b)^{1/2} \zeta_{\pm n} G_{\pm n} \alpha_n n^{-1}, \\
 (\operatorname{Im} K_{xz})_{\pm n} &= -\left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 (2b)^{1/2} \zeta_{\pm n} G_{\pm n} (\pm \alpha_n) n^{-1}, \\
 \alpha_n &= n^2 (2 \cdot n!)^{-1} \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Вклад этих слагаемых в поглощенную мощность (12.17) оказывается равным

$$P_{\pm n}^{\text{ab}} = \omega \left(\frac{\Pi_j}{\omega}\right)^2 G_n \left(\frac{\epsilon_0}{2}\right) \alpha_n |E_x \pm iE_y|^2. \quad (12.24)$$

Так как

$$\zeta_n = (\omega + n\Omega_i) / (2^{1/2} k_z v_{Ti}) = (\omega - n|\Omega_i|) / (2^{1/2} k_z v_{Ti}),$$

член $+n$ преобладает при ионном циклотронном затухании ($\omega > 0$). Член $-n$ преобладает при электронном циклотронном затухании ($\omega > 0$), поскольку

$$\zeta_{-n} = (\omega - n\Omega_e) / (2^{1/2} k_z v_{Te}).$$

Отношение компонент \mathbf{E} можно найти из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
 (K_{xx} - N_{\parallel}^2)E_x + K_{xy}E_y + (K_{xz} + N_{\perp}N_{\parallel})E_z &= 0, \\
 -K_{xy}E_x + (K_{yy} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2)E_y + K_{yz}E_z &= 0, \\
 (K_{xz} + N_{\perp}N_{\parallel})E_x - K_{yz}E_y + (K_{zz} - N_{\perp}^2)E_z &= 0.
 \end{aligned} \quad (12.25)$$

Для холодной плазмы можно в (12.25) подставить $K_{xx} \rightarrow K_{\perp}$, $K_{yy} \rightarrow K_{\perp}$, $K_{zz} \rightarrow K_{\parallel}$, $K_{xy} \rightarrow -iK_x$, $K_{xz} \rightarrow 0$, $K_{yz} \rightarrow 0$, и соотношение компонент принимает вид $E_x : E_y : E_z = (K_{\perp} - N^2) \times (K_{\parallel} - N_{\perp}^2) : -iK_x(K_{\parallel} - N_{\perp}^2) : -N_{\parallel}N_{\perp}(K_{\perp} - N^2)$.

Чтобы найти величину электрического поля, нужно решить уравнения Максвелла с диэлектрическим тензором (12.19), в котором плотность, температура и магнитное поле являются функ-

циями координат. Для аналитического решения нужно использовать упрощенные модели; в противном случае необходимы численные расчеты для определения волновых полей.

§ 12.4. Ионный циклотронный нагрев

Дисперсионное соотношение для волн в диапазоне ионных циклотронных частот (ИЦН) получается из (10.64):

$$N_{\parallel}^2 = \frac{N_{\perp}^2}{2[1 - (\omega/\Omega_i)^2]} \left(- \left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 \right) + \frac{2\omega^2}{k_{\perp}^2 v_A^2} \pm \left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 \right)^2 + 4 \left(\frac{\omega}{\Omega_i} \right)^2 \left(\frac{\omega}{k_{\perp} v_A} \right)^4 \right]^{1/2} \right).$$

Знак плюс соответствует медленной волне (L-волна, ионная циклотронная волна), а знак минус соответствует быстрой волне (R-волна, необыкновенная волна). При $1 - \omega^2/\Omega_i^2 \ll 2(\omega/k_{\perp}v_A)^2$ дисперсионное соотношение приобретает вид

$$k_z^2 = 2 \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2} \right)^{-1}$$

для медленной волны и

$$k_z^2 = -\frac{k_{\perp}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2v_A^2}$$

для быстрой волны. Поскольку возбуждаемые ивне волны обычно имеют волновые числа в диапазоне $0 < k_z^2 < (1/a)^2$, $k_{\perp}^2 > (\pi/a)^2$, существуют ограничения

$$\frac{\omega^2}{v_A^2 (1 - \omega^2/\Omega_i^2)} < \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \\ n_{20} a^2 < 2,6 \cdot 10^{-4} \frac{B^2 (1 - \omega^2/\Omega_i^2)}{A}$$

для медленной волны и

$$\frac{\omega^2}{2v_A^2} > \left(\frac{\pi}{a} \right)^2, \\ n_{20} a^2 > 0,5 \cdot 10^{-2} \frac{(\Omega_i/\omega)^2}{A/Z^2}$$

для быстрой волны [4]. Здесь n_{20} — плотность ионов в единицах 10^{20} м^{-3} , a — радиус плазмы в метрах, а A — атомный номер.

Ионная циклотронная волна (медленная волна) может быть возбуждена с помощью катушек Стикса [1]. Она способна распространяться (и давать нагрев) в плазме низкой плотности. Но она не может распространяться в плазме высокой плотности, такой как в токамаках.

Быстрая волна представляет собой в этом частотном диапазоне необыкновенную волну и может быть возбуждена кольцевой антенной, которая генерирует высокочастотное электрическое поле, перпендикулярное магнитному (см. разд. 10.2). Быстрая волна может распространяться в плазме высокой плотности. В приближении холодной плазмы, для быстрой волны в плазме с одним сортом ионов $E_x + iE_y = 0$ при $\omega = |\Omega_i|$, так что она не поглощается на циклотронном затухании. Однако электрическое поле быстрой волны в плазме с двумя сортами ионов $E_x + iE_y \neq 0$, так что быстрая волна может поглощаться, т. е. в этом случае быстрая волна может нагревать ионы.

Рассмотрим нагрев плазмы с двумя сортами ионов, M и m , быстрой волной. Массу, зарядовое число и плотность ионов M и m обозначим как m_M , Z_M , n_M и m_m , Z_m , n_m , соответственно. При использовании обозначений

$$\eta_M \equiv \frac{Z_M^2 n_M}{n_e}, \quad \eta_m \equiv \frac{Z_m^2 n_m}{n_e}$$

имеем $\eta_M/Z_M + \eta_m/Z_m = 1$, т. к. $n_e = Z_M n_M + Z_m n_m$. Поскольку для ИЦ-волны $(\Pi_e/\omega)^2 \gg 1$, дисперсионное соотношение в приближении холодной плазмы (10.20) принимает вид

$$N_{\perp}^2 = \frac{(R - N_{\parallel}^2)(L - N_{\parallel}^2)}{K_{\perp} - N_{\parallel}^2},$$

$$R = -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{(m_M/m_m)\eta_m\omega}{\omega + |\Omega_m|} + \frac{\eta_M\omega}{\omega + |\Omega_M|} - \frac{\omega}{|\Omega_M|/Z_M} \right),$$

$$L = -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{(m_M/m_m)\eta_m\omega}{\omega - |\Omega_m|} + \frac{\eta_M\omega}{\omega - |\Omega_M|} + \frac{\omega}{|\Omega_M|/Z_M} \right),$$

$$K_{\perp} = -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{(m_M/m_m)\eta_m\omega^2}{\omega^2 - \Omega_m^2} + \frac{\eta_M\omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} \right),$$

$$\Pi_i^2 \equiv \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_M}.$$

Таким образом, имеется ион-ионный гибридный резонанс при $K_{\perp} - N_{\parallel}^2 = 0$, т. е.

$$\frac{\eta_m(m_M/m_m)\omega^2}{\omega^2 - \Omega_m^2} + \frac{\eta_M\omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} \approx -\frac{\omega^2}{\Pi_i^2} N_{\parallel}^2 \approx 0,$$

$$\omega^2 \approx \omega_{IH} \equiv \frac{\eta_M + \eta_m(\mu^2/\mu')}{\eta_M + \eta_m/\mu'} \Omega_m^2,$$

$$\mu' \equiv \frac{m_m}{m_M}, \quad \mu \equiv \frac{\Omega_M}{\Omega_m} = \frac{m_m Z_M}{m_M Z_m}.$$

На рис. 12.4 показан слой ион-ионного гибридного резонанса

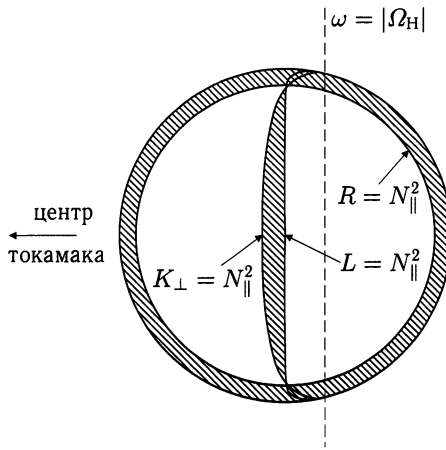


Рис. 12.4. Линия L-отсечки ($L = N_{\parallel}^2$), линия R-отсечки ($R = N_{\parallel}^2$) и линия ион-ионного гибридного резонанса ($K_{\perp} = N_{\parallel}^2$) для ИЦ-волны в токамаке с двумя ионными компонентами D^+ , H^+ . В заштрихованной области $N_{\perp}^2 < 0$

($K_{\perp} - N_{\parallel}^2 = 0$), слой L-отсечки ($L - N_{\parallel}^2 = 0$) и слой R-отсечки ($R - N_{\parallel}^2 = 0$) в плазме токамака с двумя сортами ионов D^+ (ион M) и H^+ (ион m). Так как компонента K_{zz} диэлектрического тензора гораздо больше остальных компонент даже в горячей плазме, дисперсионное соотношение горячей плазмы имеет вид [5]

$$\begin{vmatrix} K_{xx} - N_{\parallel}^2 & K_{xy} \\ -K_{xy} & K_{yy} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (12.26)$$

Используя соотношение $K_{yy} = K_{xx} + \Delta K_{yy}$, $|\Delta K_{yy}| \ll |K_{xx}|$, получаем

$$N_{\perp}^2 = \frac{(K_{xx} - N_{\parallel}^2)(K_{xx} + \Delta K_{yy} - N_{\parallel}^2) + K_{xy}^2}{K_{xx} - N_{\parallel}^2} \approx \frac{(K_{xx} + iK_{xy} - N_{\parallel}^2)(K_{xx} - iK_{xy} - N_{\parallel}^2)}{K_{xx} - N_{\parallel}^2}.$$

Если ω^2 близко к ω_{IH}^2 , величина K_{xx} дается выражением

$$K_{xx} = -\frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \left(\frac{m_M}{2m_m} \eta_m \zeta_0 Z(\zeta_1) + \frac{\eta_M \omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} \right).$$

Резонансное условие имеет вид $K_{xx} = N_{\parallel}^2$. Величина $Z(\zeta_1)$, которая появляется в дисперсионном уравнении, оказывается конечной, и $0 > Z(\zeta_1) > -1,08$. Для достижения резонанса необходимо условие

$$\eta_m \geq \eta_{\text{cr}} \equiv \frac{2}{1,08} \frac{m_m}{m_M} 2^{1/2} N_{\parallel} \frac{v_{\text{Ti}}}{c} \left(\frac{\eta_M \omega^2}{\omega^2 - \Omega_M^2} + N_{\parallel}^2 \frac{\omega^2}{\Pi_i^2} \right).$$

Тут видно отличие от случая холодной плазмы (отметим разницу между K_{xx} и K_{\perp}).

Из дисперсионного уравнения (12.26) можно получить, что при $\eta_m \geq \eta_{\text{cr}}$ в резонансном слое происходит конверсия мод [5] из быстрой волны в ионную бернштейновскую. Когда слой L-отсечки и слой ион-ионного гибридного резонанса расположены близко друг к другу, как показано на рис. 12.4, быстрая волна, распространяясь с внешней стороны тора, частично проникает сквозь слой L-отсечки вследствие туннельного эффекта и трансформируется в ионную бернштейновскую волну. После трансформации волна поглощается благодаря ионному циклотронному затуханию или затуханию Ландау. Теория трансформации мод изложена в гл. 10 книги Стикса [1]. Эксперименты по ионному циклотронному нагреву, связанные с данной темой, были проведены на установке TFR.

При $\eta_m < \eta_{\text{cr}}$ условие $K_{\perp} = N_{\parallel}^2$ не может быть удовлетворено, и ион-ионный гибридный резонанс исчезает. В этом случае быстрая волна, возбуждаемая петлевой антенной снаружи тора, может пройти сквозь область R-отсечки (благодаря тому, что ее ширина мала), затем отражается от слоя L-отсечки и оказывается запертой в области, окруженной слоями $R = N_{\parallel}^2$ и $L = N_{\parallel}^2$. В этой области находится слой, где удовлетворяется равенство $\omega = |\Omega_m|$, и ионы m , составляющие меньшую часть плазмы, нагреваются за счет ионного циклотронного затухания на основной гармонике. Ионы M , составляющие большую

часть ионов плазмы, нагреваются кулоновскими столкновениями с ионами m . Если масса ионов M в l раз больше массы ионов m , ионы M также нагреваются из-за ионного циклотронного затухания на l -той гармонике циклотронной частоты. Эксперимент подобного типа был проведен на установке PLT и показал хорошую эффективность нагрева. Такой нагрев обычно называют *нагревом на малой добавке*. Мощность, поглощаемая при затухании Ландау P_{e0} в единичном объеме, определяется (12.23), и она не мала только в случае $\zeta_0 \leq 1$. В этом случае имеем $E_y/E_z \approx K_{zz}/K_{yz} \approx 2\zeta_0^2/(2^{1/2}b^{1/2}\zeta_0(-i))$ и для P_{e0} получаем [6]

$$P_{e0} = \frac{\omega\epsilon_0}{4}|E_y|^2 \left(\frac{\Pi_e}{\omega}\right)^2 \left(\frac{k_{\perp}v_{Te}}{\Omega_e}\right)^2 2\zeta_0\pi^{1/2} \exp(-\zeta_0^2). \quad (12.27)$$

Мощность, поглощаемая за счет ионного циклотронного затухания на n -ной гармонике ионной циклотронной частоты P_{in} , получается из (12.24) в следующем виде:

$$P_{in} = \frac{\omega\epsilon_0}{2}|E_x + iE_y|^2 \left(\frac{\Pi_i}{\omega}\right)^2 \left(\frac{n^2}{2 \times n!}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^{n-1} \times \\ \times \frac{\omega}{2^{1/2}k_z v_{Ti}} \pi^{1/2} \exp\left(-\frac{(\omega - n|\Omega_i|)^2}{2(k_z v_{Ti})^2}\right). \quad (12.28)$$

Мощность, поглощаемая благодаря циклотронному поглощению на второй гармонике, пропорциональна величине параметра бета плазмы. Чтобы рассчитать поглощаемую мощность по (12.27) и (12.28), нам необходимы пространственные распределения E_x и E_y . Они могут быть рассчитаны для простой модели плоскостной плазмы [7].

В диапазоне высших гармоник ионной циклотронной частоты ($\omega \sim 2\Omega_i, 3\Omega_i$) было изучено прямое возбуждение ионной бернштейновской волны внешней антенной и волноводом, генерирующими высокочастотное поле электрическое поле, параллельное внешнему магнитному полю [8].

§ 12.5. Нижнегибридный нагрев

Так как в плазме токамака $|\Omega_i| \ll \Pi_i$ ($n_e \geq 10^{13} \text{ см}^{-3}$), выражение для квадрата частоты нижнегибридного резонанса принимает вид

$$\omega_{\text{LH}}^2 = \frac{\Pi_i^2 + \Omega_i^2}{1 + \Pi_e^2/\Omega_e^2 + Zm_e/m_i} \approx \frac{\Pi_i^2}{1 + \Pi_e^2/\Omega_e^2},$$

причем выполняются соотношения $\Omega_e \gg \omega_{\text{ЛН}} \gg |\Omega_i|$, $\Pi_e^2/\Pi_e^2 = |\Omega_i|/\Omega_e$. Для заданной частоты ω нижнегибридный резонанс $\omega = \omega_{\text{ЛН}}$ происходит там, где электронная плотность удовлетворяет условию

$$\frac{\Pi_e^2(x)}{\Omega_e^2} = \frac{\Pi_{\text{res}}^2}{\Omega_e^2} \equiv p, \quad p = \frac{\omega^2}{\Omega_e |\Omega_i| - \omega^2}.$$

Если дисперсионное уравнение (10.20) холодной плазмы разрешить относительно N_{\perp}^2 , используя $N^2 = N_{\parallel}^2 + N_{\perp}^2$, то

$$N_{\perp}^2 = \frac{K_{\perp} \tilde{K}_{\perp} - K_{\times}^2 + K_{\parallel} \tilde{K}_{\perp}}{2K_{\perp}} \pm \left[\left(\frac{K_{\perp} \tilde{K}_{\perp} - K_{\times}^2 + K_{\parallel} \tilde{K}_{\perp}}{2K_{\perp}} \right)^2 + \frac{K_{\parallel}}{K_{\perp}} (K_{\times}^2 - \tilde{K}_{\perp}^2) \right]^{1/2},$$

где $\tilde{K}_{\perp} = K_{\perp} - N_{\parallel}^2$. Соотношения $h(x) \equiv \Pi_e^2(x)/\Pi_{\text{res}}^2$, $K_{\perp} = 1 - h(x)$, $K_{\times} = ph(x)\Omega_e/\omega$, $K_{\parallel} = 1 - \beta_{\Pi}h(x)$, $\beta_{\Pi} \equiv \Pi_{\text{res}}^2/\omega^2 \sim O(m_i/m_e)$, $\alpha \equiv \Pi_{\text{res}}^2/(\omega\Omega_e) \sim O(m_i/m_e)^{1/2}$ и $\beta_{\Pi}h \gg 1$ позволяют привести его к виду

$$N_{\perp}^2(x) = \frac{\beta_{\Pi}h}{2(1-h)} \left(N_{\parallel}^2 - (1-h+ph) \pm \left[(N_{\parallel}^2 - (1-h+ph))^2 - 4(1-h)ph \right]^{1/2} \right). \quad (12.29)$$

Медленная волна соответствует знаку плюс в (12.29). Для того чтобы медленная волна проникла через периферию плазмы с низкой плотностью ($h \ll 1$) в центр объема плазмы, где плотность велика ($\Pi_e^2 = \Pi_{\text{res}}^2$, $h = 1$), величина $N_{\perp}(x)$ должна быть действительной. Следовательно, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$N_{\parallel} > (1-h)^{1/2} + (ph)^{1/2}.$$

Правая часть этого неравенства имеет максимум, равный $(1+p)^{1/2}$ в интервале $0 < h < 1$, поэтому условие достижимости нижнегибридной волной резонансной области принимает вид

$$N_{\parallel}^2 > N_{\parallel \text{cr}}^2 = 1 + p = 1 + \frac{\Pi_{\text{res}}^2}{\Omega_e^2}. \quad (12.30)$$

Если это условие не выполнено, возбуждаемая извне медленная волна проникает в область, где квадратный корень в (12.29) обращается в нуль, и трансформируется там в быструю волну. Затем быстрая волна возвращается в область низкой плотности (рис. 12.5). Медленная волна, удовлетворяющая условию проникновения, может достичь резонансной области, и N_{\perp} может стать большим, поэтому для исследования поведения этой волны нужно использовать дисперсионное соотношение для горячей плазмы. Вблизи области нижнегибридного резонанса применимо приближение электростатической волны, см. (13.1) или (С.36). Так как $|\Omega_i| \ll \omega \ll \Omega_e$, вклады ионов и электронов описываются уравнениями (13.3) и (13.4), соответственно, т. е.

$$1 + \frac{\Pi_e^2}{k^2} \frac{m_e}{T_e} (1 + I_0 e^{-b} \zeta_0 Z(\zeta_0)) + \frac{\Pi_i^2}{k^2} \frac{m_i}{T_i} (1 + \zeta Z(\zeta)) = 0,$$

где $\zeta_0 = \omega / (2^{1/2} k_z v_{Te})$, а $\zeta = \omega / (2^{1/2} k v_{Ti}) \approx \omega / (2^{1/2} k_{\perp} v_{Ti})$. Так как $I_0 e^{-b} \approx 1 - b + (3/4)b^2$, $\zeta_0 \gg 1$, $\zeta \gg 1$, $1 + \zeta Z(\zeta) \approx -(1/2)\zeta^{-2} - (3/4)\zeta^{-4}$, имеем

$$\left(\frac{3\Pi_i^2}{\omega^4} \frac{\kappa T_i}{m_i} + \frac{3}{4} \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^4} \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) k_{\perp}^4 - \left(1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \right) k_{\perp}^2 - \left(1 - \frac{\Pi_e^2}{\omega^2} \right) k_z^2 = 0. \quad (12.31)$$

Используя обозначения $\rho_i = v_{Ti} / |\Omega_i|$ и

$$s^2 \equiv 3 \left(\frac{|\Omega_e \Omega_i|}{\omega^2} + \frac{1}{4} \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega^2}{|\Omega_e \Omega_i|} \right) = 3 \left(\frac{1+p}{p} + \frac{1}{4} \frac{T_e}{T_i} \frac{p}{1+p} \right),$$

получаем

$$\left(\frac{3\Pi_i^2}{\omega^4} \frac{\kappa T_i}{m_i} + \frac{3}{4} \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^4} \frac{\kappa T_e}{m_e} \right) = \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_{Ti}^2 s^2}{\Omega_i},$$

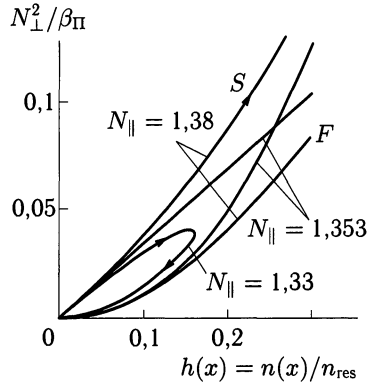


Рис. 12.5. Траектория нижнегибридной волны на диаграмме $N_{\perp}^2 - h(x)$ ($= \Pi_e^2(x) / \Pi_{res}^2$) для случая $p = 0,353$, $N_{\parallel cr} = 1 + p = 1,353$. Это отвечает случаю H^+ плазмы в поле $B = 3$ Т и $f = \omega / 2\pi = 10^9$ Гц. Электронная плотность при значении параметра $\beta_{\Pi} = 7,06 \cdot 10^3$ ($= \Pi_{res}^2 / \omega^2$) равна $n_{res} = 0,31 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$.

$$\left(1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2}\right) = \frac{1}{1+p} \frac{1-h}{h} \frac{\Pi_i^2}{\omega^2}.$$

Теперь (12.31) можно представить в безразмерном виде

$$(k_{\perp}\rho_i)^4 - \frac{1-h}{h} \frac{m_i}{m_e} \frac{1}{(1+p)s^2} (k_{\perp}\rho_i)^2 + \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^2 \frac{1}{s^2} (k_z\rho_i)^2 = 0. \quad (12.32)$$

Это дисперсионное уравнение имеет два решения. Одно соответствует медленной волне в холодной плазме, а другое — плазменной волне в горячей плазме. Медленная волна трансформируется в плазменную волну в месте, где (12.31) или (12.32) имеет равные корни [9, 10, 11]. Условие обращения дискриминанта в нуль имеет вид $1/h = 1 + 2k_z\rho_i(1+p)s$ и

$$\frac{\Pi_e^2(x)}{\Omega_e^2} = \frac{\Pi_{MC}^2}{\Omega_e^2} \equiv \frac{p}{1 + 2k_z\rho_i(1+p)s}.$$

Соответственно, трансформация мод происходит в месте выполнения условия

$$\frac{\omega^2}{\Pi_i^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{|\Omega_i|\Omega_e}\right) + \frac{N_{\parallel}v_{Te}2\sqrt{3}}{c} \left(\frac{T_i}{T_e} + \frac{1}{4} \left(\frac{\omega^2}{\Omega_i\Omega_e}\right)^2\right)^{1/2},$$

а величина $k_{\perp}^2\rho_i^2$ в этом месте становится равной

$$k_{\perp}^2\rho_i^2|_{\text{М.С.}} = \frac{m_i}{m_e} \frac{k_z\rho_i}{s}.$$

Если электронная температура в центре плазмы достаточно высока, чтобы удовлетворить условию $v_{Te} > (1/3)c/N_{\parallel}$, волна поглощается электронами вследствие затухания Ландау.

После трансформации мод величина N_{\perp} возрастает, так что величина c/N_{\perp} становится сравнимой с ионной тепловой скоростью ($c/N_{\perp} \sim v_{Ti}$). Так как $\omega \gg |\Omega_i|$, магнитное поле не оказывает влияния на движение ионов на временных масштабах порядка ω^{-1} . Поэтому волна с фазовой скоростью c/N поглощается ионами за счет ионного затухания Ландау. Когда скорость ионов v_i больше, чем c/N_{\perp} ($v_i > c/N_{\perp}$), ионы ускоряются или замедляются в моменты времени, определяемые условием $v_i \cos(\Omega_i t) \approx c/N_{\perp}$, и подвергаются стохастическому нагреву.

Пусть волна возбуждается набором волноводов, показанным на рис. 12.6, с соответствующей разностью фаз для обеспечения необходимого параллельного показателя преломления $N_{\parallel} = k_z c/\omega = 2\pi c/(\lambda_z \omega)$. В области низкой плотности у границы плазмы компонента электрического поля, параллельная магнит-

ному полю, у медленной волны больше, чем у быстрой. Поэтому направление волноводов выбрано так, чтобы возбуждать электрическое поле, параллельное силовым линиям магнитного поля. Связь волн с плазмой подробно обсуждается в [12], а обзор экспериментов по НГН есть в книге [13].

Для генерации тока нижегибридной волной нужно выполнить условие проникновения (12.30) при $c/N_{\parallel} \gg v_{Te}$. При электронной температуре $\kappa T_e \sim 10$ кэВ отношение v_{Te}/c равно $\sim 1/7$. Даже если N_{\parallel} выбрано меньшим, чем нужно для выполнения (12.30), волна подвержена поглощению на электронах уже во внешней части плазмы, и нельзя ожидать, что она сможет проникнуть в центральную часть плазмы.

Когда величина N_{\parallel} выбрана такой, что $N_{\parallel} \sim (1/3)(c/v_{Te})$, можно ожидать нагрева электронов, что и наблюдалось экспериментально. В условиях, когда происходит конверсия мод, можно ожидать нагрева ионов. Однако экспериментальные результаты не столь прозрачны, как при электронном нагреве.

§ 12.6. Электронный циклотронный нагрев

Дисперсионное соотношение для волн в диапазоне электронных циклотронных частот в холодной плазме дается уравнением (10.79). Знаки плюс и минус в (10.79) относятся к обыкновенной и необыкновенной волнам, соответственно. Обыкновенная волна может распространяться, только когда $\omega^2 > \Pi_e^2$, как это ясно из (10.86) (в случае $\theta = \pi/2$). Эту волну можно возбудить набором волноводов, подобным тому, что используется для нижегибридных волн (рис. 12.6) и излучает электрическое поле, параллельное внешнему магнитному полю. Фаза каждого волновода выбирается таким образом, чтобы обеспечить соответствующую величину параллельного показателя преломления $N_{\parallel} = k_z c / \omega = 2\pi c / (\omega \lambda_z)$.

Дисперсионное соотношение для необыкновенной волны дается (10.87). При $\theta = \pi/2$ оно задается (10.52). Необходимо, чтобы неравенства $\omega_{UH}^2 > \omega^2 > \omega_L^2$, ω_{LH}^2 оставались верными. Как видно из диаграммы СМА на рис. 10.5, необыкновенная волна может проникнуть в центр плазмы со стороны большего поля (см. рис. 12.7), но не может со стороны меньшего поля из-за

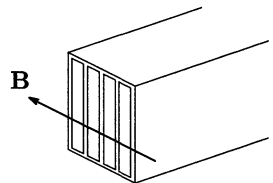


Рис. 12.6. Набор волноводов для возбуждения нижегибридной (медленной) волны

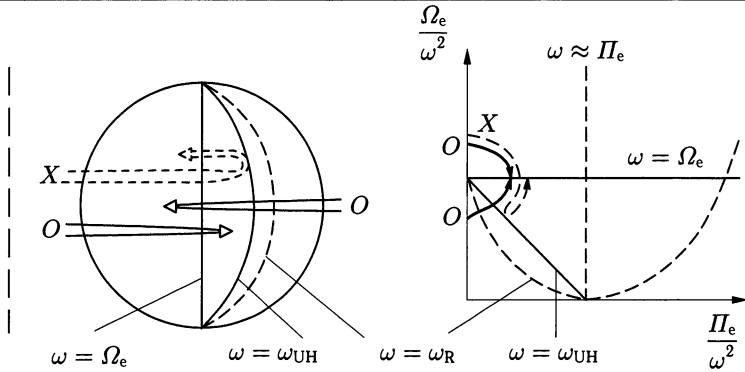


Рис. 12.7. Положения электронного циклотронного резонанса ($\omega = \Omega_e$), верхнего гибридного резонанса ($\omega = \omega_{UH}$) и R-отсечки ($\omega = \omega_R$) в случае $\Omega_{e0} > \Pi_{e0}$, где Ω_{e0} и Π_{e0} — электронная циклотронная резонансная частота и плазменная частота в центре плазмы, соответственно (левый рисунок). Правый рисунок — диаграмма СМА в области электронной циклотронной частоты

отсечки $\omega = \omega_R$. Необыкновенную волну можно возбудить волноводом, который излучает электрическое поле, перпендикулярное внешнему магнитному полю (см. разд. 10.2а).

Вклад ионов в диэлектрический тензор пренебрежимо мал. Когда для электронов выполняются соотношения $b \ll 1$, $\zeta_0 \gg 1$, диэлектрический тензор горячей плазмы имеет вид

$$\begin{aligned} K_{xx} &= K_{yy} = 1 + X\zeta_0 Z_{-1}/2, & K_{zz} &= 1 - X + N_{\perp}^2 \chi_{zz}, \\ K_{xy} &= -iX\zeta_0 Z_{-1}/2, & K_{xz} &= N_{\perp} \chi_{xz}, & K_{yz} &= iN_{\perp} \chi_{yz}, \\ \chi_{xz} &\approx \chi_{yz} \approx 2^{-1/2} XY^{-1} \frac{v_T}{c} \zeta_0 (1 + \zeta_{-1} Z_{-1}), \\ \chi_{zz} &\approx XY^{-2} \left(\frac{v_T}{c} \right)^2 \zeta_0 \zeta_{-1} (1 + \zeta_{-1} Z_{-1}), \\ X &\equiv \frac{\Pi_e^2}{\omega^2}, & Y &\equiv \frac{\Omega_e}{\omega}, & \zeta_{-1} &= \frac{\omega - \Omega_e}{2^{1/2} k_z v_T}, & N_{\perp} &= \frac{k_{\perp} c}{\omega}. \end{aligned}$$

Уравнения Максвелла можно записать как

$$\begin{aligned} (K_{xx} - N_{\parallel}^2) E_x + K_{xy} E_y + N_{\perp} (N_{\parallel} + \chi_{xz}) E_z &= 0, \\ -K_{xy} E_x + (K_{yy} - N_{\parallel}^2 - N_{\perp}^2) E_y + iN_{\perp} \chi_{yz} E_z &= 0, \\ N_{\perp} (N_{\parallel} + \chi_{xz}) E_x - iN_{\perp} \chi_{yz} E_y + (1 - X - N_{\perp}^2 (1 - \chi_{zz})) E_z &= 0. \end{aligned}$$

Решением являются выражения

$$\frac{E_x}{E_z} = - \frac{iN_{\perp}^2 \chi_{xz} (N_{\parallel} + \chi_{xz}) + K_{xy} (1 - X - N_{\perp}^2 (1 - \chi_{zz}))}{N_{\perp} (i\chi_{xz} (K_{xx} - N_{\parallel}^2) + K_{xy} (N_{\parallel} + \chi_{xz}))},$$

$$\frac{E_y}{E_z} = -\frac{N_{\perp}^2(N_{\parallel} + \chi_{xz})^2 - (K_{xx} - N_{\parallel}^2)(1 - X - N_{\perp}^2(1 - \chi_{zz}))}{N_{\perp}(i\chi_{xz}(K_{xx} - N_{\parallel}^2) + K_{xy}(N_{\parallel} + \chi_{xz}))}.$$

Мощность, поглощаемая единицей объема P_{-1} , определяется из (12.24) следующим образом:

$$P_{-1} = \omega X \zeta_0 \frac{\pi^{1/2}}{2} \exp\left(-\frac{(\omega - \Omega_e)^2}{2k_z^2 v_{Te}^2}\right) \frac{\epsilon_0}{2} |E_x - iE_y|^2.$$

Если $\omega = \Omega_e$, то $\zeta_{-1} = 0$, $Z_{-1} = i\pi^{1/2}$, $K_{xx} = 1 + ih$, $K_{xy} = h$, $\chi_{yz} = \chi_{xz} = 2^{1/2}X(v_{Te}/c)\zeta_0 = X/(2N_{\parallel})$, $\chi_{zz} = 0$, $h \equiv \pi^{1/2}\zeta_0 X/2$. Диэлектрический тензор \mathbf{K} приобретает вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 + ih & h & N_{\perp}\chi_{xz} \\ -h & 1 + ih & iN_{\perp}\chi_{xz} \\ N_{\perp}\chi_{xz} & -iN_{\perp}\chi_{xz} & 1 - X \end{bmatrix}.$$

Для обыкновенной волны (О-волна) имеем

$$\frac{E_x - iE_y}{E_z} = \frac{iN_{\perp}^2(O)N_{\parallel}(N_{\parallel} + \chi_{xz}) - i(1 - N_{\parallel}^2)(1 - X - N_{\perp}^2(O))}{N_{\perp}(O)(N_{\parallel}h + i\chi_{xz}(1 - N_{\parallel}^2))}.$$

Когда $N_{\parallel} \ll 1$ и угол падения близок к перпендикулярю, из (10.82) следует $1 - X - N_{\perp}^2(O) = (1 - X)N_{\parallel}^2$. Так как $\chi_{xz} = X/2N_{\parallel}$, величина $\chi_{xz} \gg N_{\parallel}$. Вследствие этого

$$\frac{E_x - iE_y}{E_z} = \frac{iN_{\perp}(O)N_{\parallel}\chi_{xz}}{N_{\parallel}h + i\chi_{xz}}.$$

Для необыкновенной волны (Х-волна) получаем

$$\frac{E_x - iE_y}{E_y} = -\frac{iN_{\perp}^2(X)N_{\parallel}(N_{\parallel} + \chi_{xz}) - i(1 - N_{\parallel}^2)(1 - X - N_{\perp}^2(X))}{N_{\perp}^2(X)(N_{\parallel} + \chi_{xz})^2 - (K_{xx} - N_{\parallel}^2)(1 - X - N_{\perp}^2(X))}.$$

При $N_{\parallel} \ll 1$ и $\omega = \Omega_e$ из (10.83) следует $1 - X - N_{\perp}^2(X) \approx \approx -1 + N_{\parallel}^2$. Так как $\chi_{xz}^2 = (2\pi)^{-1/2}(v_{Te}/cN_{\parallel})Xh \ll h$, предыдущее уравнение приводится к

$$\frac{E_x - iE_y}{E_y} = \frac{-(1 + N_{\perp}^2(X)N_{\parallel}(N_{\parallel} + \chi_{xz}))}{h - i(1 + N_{\perp}^2(X)(N_{\parallel} + \chi_{xz})^2)} \sim \frac{-1}{h}.$$

Мощность, поглощаемая единицей объема, при $\omega = \Omega_e$ равна

$$P_{-1}(O) \approx \frac{\omega\epsilon_0}{2} |E_z|^2 \frac{hN_{\perp}^2(O)N_{\parallel}^2\chi_{xz}^2}{(N_{\parallel}h)^2 + \chi_{xz}^2} \exp(-\zeta_{-1}^2) \approx$$

$$\approx \frac{\omega\epsilon_0}{2} |E_z|^2 \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\Pi_e}{\omega}\right)^2 \left(\frac{v_{Te}}{cN_{\parallel}}\right) \frac{N_{\perp}^2(O)N_{\parallel}^2}{N_{\parallel}^2 + (v_{Te}/c)^2(2/\pi)}$$

для обыкновенной волны и

$$P_{-1}(X) \sim \frac{\omega\epsilon_0}{2} |E_y|^2 \frac{1}{h} = \frac{\omega\epsilon_0}{2} |E_y|^2 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\Pi_e}{\omega}\right)^{-2} \left(\frac{N_{\parallel}v_{Te}}{c}\right)$$

для необыкновенной волны [14, 15].

Так как $P(O) \propto n_e T_e^{1/2}/N_{\parallel}$, $P(X) \propto N_{\parallel} T_e^{1/2}/n_e$, обыкновенная волна поглощается с ростом плотности и при приближении направления распространения к перпендикулярному сильнее, а для необыкновенной волны — тенденция обратная.

Эксперименты по электронному циклотронному нагреву проводились на установках T-10, ISX-B, JFT-2, D-III-D и других; была продемонстрирована хорошая эффективность ЭЦН.

Список литературы

1. *Stix T.H.* The Theory of Plasma Waves. — N. Y.: McGraw-Hill, 1962 (русский перевод: *Стукс Т.* Теория плазменных волн. — М.: Атомиздат, 1965); *Stix T.H.* Waves in Plasmas. — N. Y.: American Institute of Physics, 1992.
2. *Fried B.D., Conte S.D.* The Plasma Dispersion Function. — N. Y.: Academic Press, 1961.
3. *Miyamoto K.* Plasma Physics for Nuclear Fusion. — Revised Edition. — The MIT Press, Cambridge, Mass., 1989. Chap. 11.
4. *Porkolab M.* Fusion (ed. by *Teller E.*) V. 1. Part B. P. 151. — N. Y.: Academic Press, 1981.
5. *Scharer J.E., McVey B.D., Mau T.K.* Nucl. Fusion. 1977. V. 17. P. 297.
6. *Stix T.H.* Nucl. Fusion. 1975. V. 15. P. 737.
7. *Fukuyama A., Nishiyama S., Itoh K. Itoh S.I.* Nucl. Fusion. 1983. V. 23. P. 1005.
8. *Ono M., Watari T., Ando R., et al.* Phys. Rev. Lett. 1985. V. 54. P. 2339.
9. *Stix T.H.* Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 878.
10. *Glagolev V.M.* Plasma Phys. 1972. V. 14. P. 301, 315.
11. *Brambilla M.* Plasma Phys. 1976. V. 18. P. 669.
12. *Bernabei S., Heald M.A., Hooke W.M., et al.* Nucl. Fusion. 1977. V. 17. P. 929.
13. *Takamura S.* Fundamentals of Plasma Heating. — Nagoya Univ. Press, 1986 (in Japanese).
14. *Fidone I., Granata G., Ramponi G.* Phys. Fluids. 1978. V. 21. P. 645.
15. *Litvak A.G., Permitin G.V., Suvorov E.V., Frajman A.A.* Nucl. Fusion. 1977. V. 17. P. 659.

Глава 13

КИНЕТИЧЕСКИЕ (ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ) НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Помимо магнитогидродинамических неустойчивостей, обсуждавшихся в гл. 8, существует иной тип неустойчивостей, вызываемых отклонениями функции распределения скоростей от устойчивой максвелловской. Неустойчивости, зависящие от вида функции распределения по скоростям, называются *неустойчивостями в пространстве скоростей*¹⁾, или *микронеустойчивостями*. Однако различие между микро- и макро- (или иначе МГД) неустойчивостями не всегда ясно, и иногда неустойчивость принадлежит к обоим типам.

§ 13.1. Дисперсионное уравнение для электростатических волн

В этой главе описываются возмущения типа электростатической волны, когда электрическое поле может быть выражено как $\mathbf{E} = -\nabla\phi = -ik\phi$. Дисперсионное уравнение для таких возмущений дается выражением (см. разд. 10.5)

$$k_x^2 K_{xx} + 2k_x k_z K_{xz} + k_z^2 K_{zz} = 0.$$

Вывод дисперсионного соотношения для горячей плазмы описывается в деталях в Приложении С. Если в нулевом приближении функция распределения выражается как

$$\begin{aligned} f_0(v_\perp, v_z) &= n_0 F_\perp(v_\perp) F_z(v_z), \\ F_\perp(v_\perp) &= \frac{m}{2\pi\kappa T_\perp} \exp\left(-\frac{mv_\perp^2}{2\kappa T_\perp}\right), \\ F_z(v_z) &= \left(\frac{m}{2n\kappa T_\perp}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2\kappa T_z}\right), \end{aligned}$$

¹⁾ Наряду с этим термином используется столь же распространенное название *кинетические неустойчивости*. — *Примеч. ред.*

то дисперсионное уравнение дается (С.36), а именно,

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{\kappa T_z} \left(1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{T_z}{T_{\perp}} \frac{(-n\Omega)}{\omega_n} \right) \zeta_n Z(\zeta_n) I_n(b) e^{-b} \right) = 0, \quad (13.1)$$

где

$$\zeta_n \equiv \frac{\omega_n}{2^{1/2} k_z v_{Tz}}, \quad \omega_n \equiv \omega - k_z V + n\Omega, \\ b = (k_x v_{T\perp} / \Omega)^2, \quad v_{Tz}^2 = \kappa T_z / m, \quad v_{T\perp}^2 = \kappa T_{\perp} / m,$$

$I_n(b)$ — модифицированная функция Бесселя, $Z(\zeta)$ — дисперсионная функция.

Если частота волны гораздо больше циклотронной частоты ($|\omega| \gg |\Omega|$) или $b \rightarrow 0$ ($T_{\perp} \rightarrow 0$, $k_x \rightarrow 0$), то $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$, $n\Omega/\omega_n \rightarrow 0$, $I_n \rightarrow 0$ ($n \neq 0$), $I_0 \rightarrow 1$, т. е. дисперсионное соотношение¹⁾ сводится к

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{\kappa T_z} (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) = 0 \quad (|\omega| \gg |\Omega|). \quad (13.2)$$

В случае $B = 0$ дисперсионное соотношение дается выражением

$$k^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{\kappa T} (1 + \zeta Z(\zeta)) = 0 \quad \left(\zeta = \frac{\omega - kV}{2^{1/2} k v_T}, B = 0 \right). \quad (13.3)$$

Когда частота волны гораздо меньше циклотронной ($|\omega| \ll |\Omega|$), то $\zeta_n \rightarrow \infty$ ($n \neq 0$), $\zeta_n Z_n \rightarrow -1$ и $\sum I_n(b) e^{-b} = 1$, так что

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{\kappa T_z} \left(I_0 e^{-b} (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) + \frac{T_z}{T_{\perp}} (1 - I_0 e^{-b}) \right) = 0 \\ (|\omega| \ll |\Omega|). \quad (13.4)$$

Когда частота волны гораздо больше циклотронной или очень мало магнитное поле, дисперсионные соотношения (13.2), (13.3)

¹⁾ Дисперсионная функция, определенная (С.32), пропорциональна стандартному интегралу вероятностей (функции Крампа) $w(\zeta)$: $Z(\zeta) = i\sqrt{\pi} w(\zeta)$. — *Примеч. ред.*

сводятся к

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum \Pi^2 \frac{m}{\kappa T_z} \left(k_z \frac{\kappa T_z}{m} \int \frac{\partial(f/n_0)}{\omega - k_z v_z} dv_z \right) = 0.$$

Интегрирование по частям дает

$$\frac{k_x^2 + k_z^2}{k_z^2} = \sum \Pi^2 \int \frac{(f/n_0)}{(\omega - k_z v_z)^2} dv_z. \quad (13.5)$$

§ 13.2. Двухпотоковая неустойчивость

Важное физическое явление — взаимодействие пучка с плазмой. Рассмотрим возбуждение волны в случае, когда частицы сорта j дрейфуют со скоростью V_j , и разброс скоростей равен нулю. Функция распределения в этом случае

$$f_i(v_z) = n_j \delta(v_z - V_j).$$

Дисперсионное соотношение для волны, распространяющейся в направлении вдоль магнитного поля с ($k_x = 0$),

$$1 = \sum_j \frac{\Pi_j^2}{(\omega - kV_j)^2}.$$

В особом случае $\Pi_1^2 = \Pi_2^2$ ($n_1^2 q_1^2 / m_1 = n_2^2 q_2^2 / m_2$) дисперсионное уравнение оказывается квадратным уравнением:

$$(\omega - k\bar{V})^2 = \Pi_t^2 \left(\frac{1 + 2x^2 \pm (1 + 8x^2)^{1/2}}{2} \right),$$

где

$$\Pi_t^2 = \Pi_1^2 + \Pi_2^2, \quad x = \frac{k(V_1 - V_2)}{2\Pi_t}, \quad \bar{V} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Для знака «минус» в правой части дисперсионное соотношение выглядит как

$$(\omega - k\bar{V})^2 = \Pi_t^2 (-x^2 + x^3 + \dots), \quad (13.6)$$

и волна неустойчива при $x < 1$, т. е. при

$$k^2(V_1 - V_2)^2 < 4\Pi_t^2.$$

Энергия, необходимая для возбуждения этой волны, поступает из кинетической энергии пучка (в нулевом порядке). Когда имеется какое-либо возмущение в движении пучка, заряженные

частицы могут собраться вместе (так называемая бунчировка), и возникнет электрическое поле. Если это поле усиливает бунчировку, то возмущение нарастает. Такая неустойчивость называется *двухпотоковой*.

§ 13.3. Неустойчивость электронного пучка

Рассмотрим взаимодействие пучка малой плотности, движущегося со скоростью V_0 , с плазмой, состоящей из холодных ионов и горячих электронов. Дисперсионное соотношение (13.5) для электростатической волны с $k_x = 0$, ($E_x = E_y = 0$, $E_z \neq 0$, $\mathbf{V}_1 = 0$) дается выражением

$$K_{zz} = K_{\parallel} - \frac{\Pi_b^2}{(\omega - kV_0)^2} =$$

$$= 1 - \frac{\Pi_i^2}{\omega^2} - \Pi_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_e(v_z)/n_0}{(\omega - kv_z)^2} dv_z - \frac{\Pi_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = 0. \quad (13.7)$$

В пределе разреженного пучка ($\Pi_b^2 \rightarrow 0$), дисперсионное соотношение сводится к $K_{\parallel}(\omega, k) \approx 0$, если $\omega \neq kV_0$. При учете пучка дисперсионное соотношение должно иметь вид

$$\omega - kV_0 = \delta_{\omega}(k) \quad (\delta_{\omega}(k) \ll kV_0).$$

Уравнение (13.7) сводится к

$$\frac{\Pi_b^2}{\delta_{\omega}^2} = K_{\parallel}(\omega = kV_0, k) + \left(\frac{\partial K_{\parallel}}{\partial \omega} \right)_{\omega=kV_0} \delta_{\omega}.$$

Если $\omega = kV_0$ такова, что $K_{\parallel} \neq 0$, то вторым членом в правой части этого уравнения можно пренебречь:

$$\frac{\Pi_b^2}{\delta_{\omega}^2} = K_{\parallel}(\omega = kV_0, k).$$

Выражение для $K_{\parallel}(\omega = kV_0, k)$ выглядит так:

$$K_{\parallel}(\omega_r) = K_R(\omega_r) + iK_I(\omega_r).$$

Член K_I описывает затухание Ландау (см. разд. 12.3).

Когда условие $\omega = kV_0$ выполняется в области, где затухание Ландау неэффективно, то $|K_I| \ll |K_R|$, и дисперсионное соотношение сводится к

$$\frac{\Pi_b^2}{(\omega - kV_0)^2} = K_R. \quad (13.8)$$

Таким образом, если

$$K_R < 0, \quad (13.9)$$

то δ_ω — мнимая величина, и волна неустойчива. Когда диэлектрическая проницаемость отрицательна, то вероятно бунчировка электрических зарядов, и можно предсказать возникновение неустойчивости.

Если же условие $\omega = kV_0$ выполняется в области, где затухание Ландау эффективно, то критерием неустойчивости служит условие отрицательности плотности энергии волны W_0 в диспергирующей среде (см. (12.6)), т. к. при этом абсолютная величина W_0 возрастает, если $\partial W_0/\partial t$ отрицательна,

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E_z^* \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega K_{zz}) E_z \right) = -\frac{\omega_r}{2} \epsilon_0 E_z^* K_1 E_z < 0.$$

В такой волне при потере энергии волны на затухание Ландау амплитуда волны увеличивается, поскольку плотность энергии волны отрицательна. Для знакомства с более детальным анализом взаимодействия пучок—плазма читатели отсылаются к книге [1].

§ 13.4. Неустойчивость Харриса

Частицы плазмы, удерживаемой в пробочном магнитном поле, попадают в конус потерь $((v_\perp/v)^2 < 1/R_m)$, R_m — пробочное отношение) и уходят из системы, приводя к анизотропии функции распределения в пространстве скоростей. Плазма, создаваемая ионным или электронным циклотронным нагревом, также анизотропна: температура, связанная с движением частиц поперек магнитного поля, выше, чем продольная температура.

Рассмотрим случай, когда функция распределения является двухтемпературной (би-максвелловской). Предполагается, что плотность и температура однородны в пространстве и что отсутствует поток частиц ($V = 0$). В этом случае дисперсионное соотношение (13.1) имеет вид

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 m_j \left(\frac{1}{\kappa T_z} + \right. \\ \left. + \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l(b) e^{-b} \left(\frac{1}{\kappa T_z} + \frac{1}{\kappa T_\perp} \frac{(-l\Omega)}{\omega + l\Omega} \right) \zeta_l Z(\zeta_l) \right)_j = 0, \quad (13.10) \\ \zeta_l = \frac{\omega + l\Omega}{(2\kappa T_z/m)^{1/2} k_z}.$$

Обозначим действительную и мнимую части левой части (13.10) при действительной $\omega = \omega_r$ как $K(\omega_r) = K_r(\omega_r) + iK_i(\omega_r)$.

Для комплексного решения $\omega_r + i\gamma$ уравнения (13.10), т. е. уравнения $K(\omega_r + i\gamma) = 0$, при $|\gamma| \ll |\omega_r|$ имеем $K_r(\omega_r) = 0$, $\gamma = -K_i(\omega_r)(\partial K_r(\omega_r)/\partial \omega_r)^{-1}$. Это легко получается, если воспользоваться разложением в ряд Тейлора. Соответственно, найдем

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 m_j \left(\frac{1}{\kappa T_z} + \frac{1}{(2\kappa T_z/m)^{1/2} k_z} \sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l e^{-b} \left(\frac{\omega + l\Omega}{\kappa T_z} - \frac{l\Omega}{\kappa T_{\perp}} \right) Z_r(\zeta_l) \right) = 0, \quad (13.11)$$

$$\gamma = -\frac{1}{A} \pi^{1/2} \sum_j \Pi_j^2 m_j \times \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l e^{-b} \frac{1}{(2\kappa T_z/m)^{1/2} |k_z|} \left(\frac{\omega + l\Omega}{\kappa T_z} - \frac{l\Omega}{\kappa T_{\perp}} \right) \exp(-\zeta_l^2) \right)_j, \quad (13.12)$$

$$A = \sum_j \Pi_j^2 m_j \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[I_l e^{-b} \left(\frac{Z_r(\zeta_l)/\kappa T_z}{(2\kappa T_z/m)^{1/2} k_z} + \frac{1}{(2\kappa T_z/m) k_z^2} \left(\frac{\omega + l\Omega}{\kappa T_z} - \frac{l\Omega}{\kappa T_{\perp}} \right) Z_r'(\zeta_l) \right) \right].$$

Здесь $Z_r(\zeta_l)$ — действительная часть функции $Z(\zeta_l)$, а $Z_r'(\zeta_l)$ — производная по ζ_l .

Предположим, что электроны холодные ($b_e \approx 0$, $|\zeta_{0e}| \gg 1$), а ионы горячие. Тогда вклад электронов в (13.11) доминирует, и ионным членом можно пренебречь. Уравнение (13.11) принимает вид

$$k^2 - \Pi_e^2 \frac{k_z^2}{\omega_r^2} = 0, \quad (13.13)$$

откуда

$$\omega_r = \pm \Pi_e \frac{k_z}{k}.$$

Подстановка ω_r в (13.12) дает

$$\gamma = \frac{\pi^{1/2}}{2k^2} \sum_j \Pi_j^2 \left(\frac{m}{\kappa T_z} \right)_j \frac{1}{(2\kappa T_z/m)_j^{1/2} |k_z|} \times \\ \times \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} I_l e^{-b\omega_r} \left(-(\omega_r + l\Omega) + \frac{T_z}{T_{\perp}} l\Omega \right) \exp(-\zeta_l^2) \right)_j. \quad (13.14)$$

Величина $\exp(-\zeta_l^2)$ имеет какое-либо осмысленное значение только вблизи $\omega_r + l\Omega_i = \omega_r - l|\Omega_i| \approx 0$. Первый член в скобках в (13.14), $-(\omega_r - l|\Omega_i|)$, может быть дестабилизирующим, а второй член, $-(T_z/T_{\perp})l|\Omega_i|$, является стабилизирующим. Соответственно, необходимые условия неустойчивости ($\gamma > 0$) суть

$$\omega_r \sim l|\Omega_i|, \quad \omega_r < l|\Omega_i|, \quad \frac{T_z}{T_{\perp}} l < \frac{1}{2},$$

т. е.

$$\omega_r = \Pi_e \frac{k_z}{k} < l|\Omega_i|, \quad (13.15)$$

$$\frac{T_{\perp}}{T_z} > 2l. \quad (13.16)$$

Когда плотность возрастает до величины, при которой Π_e приближается к $|\Omega_i|$, плазменные колебания резонируют с ионным ларморовским вращением, приводя к неустойчивости. При дальнейшем возрастании плотности косая (наклонная) ленгмюровская волна оказывается связанной с ионной циклотронной гармоникой $l|\Omega_i|$, и развивается неустойчивость с $\omega_r = \Pi_e k_z/k \sim l|\Omega_i|$. Как ясно из (13.16), степень анизотропии должна быть больше для неустойчивости в области более высоких частот (l становится больше).

Итак, неустойчивости с частотами вблизи ионных циклотронных гармоник возникают одна за одной в плазме с холодными электронами при наличии анизотропии (13.16) и при выполнении условия на плотность электронов

$$n_e \sim l^2 Z^2 \frac{m_e}{m_i} \left(\frac{B^2}{\mu_0 m_i c^2} \right) \frac{k^2}{k_z^2} \quad (l = 1, 2, 3, \dots).$$

Эта неустойчивость называется *неустойчивостью Харриса* [2, 3].

Выше были описаны неустойчивости в пространстве скоростей в простейшем случае однородной би-максвелловской

плазмы. Функция распределения плазмы, удерживаемой в пробочной ловушке, равна нулю в области конуса потерь $(v_{\perp}/v)^2 < 1/R_M(R_M - \text{пробочное отношение})$. Связанная с этим неустойчивость называется *конусной* [4]. В общем случае плазма является горячей и плотной в центре, но холодной и разреженной на периферии. Неустойчивости, раскачиваемые градиентом температуры или плотности, называются *дрейфовыми*. Электростатическая дрейфовая неустойчивость [5, 7] неоднородной плазмы может быть детально проанализирована при использовании более общего дисперсионного соотношения, описанного в Приложении С. Отметим, что в тороидальном поле всегда присутствуют частицы, запертые на внешнем обводе тора, где поле является слабым. Неустойчивости, раскачиваемые запертыми частицами, называются *неустойчивостями на запертых частицах* [6, 7].

Список литературы

1. *Briggs R.J.* Electron-Stream Interaction with Plasma. — The MIT Press, Cambridge, Mass., 1964.
2. *Harris E.G.* Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 34.
3. *Harris E.G.* Physics of Hot Plasma. (ed. by *Rye B.J., Taylor J.B.*). — Edinburgh: Oliver & Boyd, 1970. P. 145.
4. *Rosenbluth M.N., Post R.F.* Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 547.
5. *Krall N.A., Rosenbluth M.N.* Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 1488.
6. *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* Nucl. Fusion. 1971. V. 11. P. 67.
7. *Miyamoto K.* Plasma Physics for Nuclear Fusion. — Revised Edition. — The MIT Press, Cambridge, Mass., 1989. Chap. 12.

НЕУСТОЙЧИВОСТИ, ВЫЗВАННЫЕ ВЫСОКОЭНЕРГИЧНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Горение термоядерной плазмы зависит от нагрева высокоэнергичными альфа-частицами, образующимися в реакциях синтеза. Значительные потери этих частиц могут быть вызваны фишбон-неустойчивостью и тороидальными альфвеновскими собственными модами. Такие потери не только уменьшают эффективность нагрева альфа-частицами, но приводят также к повышенной тепловой нагрузке и разрушению элементов конструкции, обращенных к плазме. Соответствующие проблемы изучались экспериментально и анализировались теоретически. В данной главе описываются основы различных теорий коллективных неустойчивостей быстрых частиц.

§ 14.1. Фишбон-неустойчивость

Колебания «фишбон» впервые наблюдались на токамаке PDХ в экспериментах с почти поперечной инжекцией нейтрального пучка. Связанные с этими колебаниями флуктуации полоидального магнитного поля, детектируемые катушками Мирнова, имеют на осциллограммах характерный вид рыбьего скелета, отчего колебания и были названы «фишбон». Регистрируемые всплески вылетающих частиц, соответствующие потерям быстрых ионов пучка, коррелируют с фишбон-событиями и приводят к уменьшению эффективности нагрева пучком. Структура моды при этом была идентифицирована как внутренняя кинк-мода $m = 1$, $n = 1$ с частотами колебаний-предвестников, близкими к диамагнитной частоте тепловых ионов и к частоте тороидальной прецессии быстрых ионов.

14.1а. Формулировка подхода

Теоретический анализ *фишбон-неустойчивости* проводится, главным образом, в соответствии с работой Чена, Уайта и Розенблюта [1]. Основная плазма при этом рассматривается в рамках идеальной МГД, а для горячей компоненты используется гироки-

нетическое описание. В первом порядке уравнение для смещения ξ есть (см. (8.25))

$$\rho_m \gamma^2 \xi = \mathbf{j} \times \delta \mathbf{B} + \delta \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \delta p_c - \nabla \delta p_h, \quad (14.1)$$

где δp_c — первый порядок возмущения давления основной плазмы, так что $\nabla \delta p_c = -\xi \cdot \nabla p_c - \gamma_s p \nabla \cdot \xi$, а δp_h — первый порядок возмущения градиента давления горячей компоненты. Имеем следующие соотношения идеальной МГД:

$$\delta \mathbf{E}_\perp = \gamma \xi \times \mathbf{B}, \quad \delta \mathbf{E}_\parallel = 0, \quad \delta \mathbf{B} = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}), \quad \delta \mathbf{j} = \nabla \cdot \delta \mathbf{B}.$$

Умножая (14.1) на ξ^* и интегрируя по пространству в предположении фиксированной проводящей границы, получаем

$$\delta W_{\text{MHD}} + \delta W_K + \delta I = 0, \quad (14.2)$$

где

$$\delta I = \frac{\gamma^2}{2} \int \rho_m |\xi|^2 dr, \quad (14.3)$$

$$\delta W_K = \frac{1}{2} \int \xi \cdot \nabla \delta p_h dr, \quad (14.4)$$

δW_{MHD} — потенциальная энергия основной плазмы, связанная со смещением ξ , которая обсуждалась в разд. 8.2b и дается выражением (8.79), а δW_K — вклад горячей компоненты.

14.1b. МГД составляющая потенциальной энергии

Рассмотрим МГД член (δW_{MHD}), который состоит из вклада δW_{MHD}^s от сингулярной окрестности рациональной поверхности и из вклада $\delta W_{\text{MHD}}^{\text{ext}}$ от внешней области. Для круглой цилиндрической плазмы вклад от внешней области (см. (8.92))

$$\frac{\delta W_{\text{MHDcyl}}^{\text{ext}}}{2\pi R} = \frac{\pi}{2\mu_0} \int_0^a \left(f \left| \frac{d\xi_r}{dr} \right|^2 + g |\xi_r|^2 \right) dr, \quad (14.5)$$

где f и g даны в (8.93) и (8.95). В случае, когда $r/R \ll 1$, величины f и g для моды $(-m, n)$ равны

$$f = \frac{r^3}{R^2} B_z^2 \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{nr}{mR} \right)^2 \right),$$

$$g = \frac{r}{R} B_z^2 \left(\left(\frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right)^2 \left((m^2 - 1) + \frac{n^2 r^2}{R^2} \right) \left(1 - \left(\frac{nr}{mR} \right)^2 \right) + \right.$$

$$+2 \left(\frac{1}{q^2} - \left(\frac{n}{m} \right)^2 \right) \left(\frac{n}{m} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^2, \quad (14.6)$$

где $q(r) \equiv rB_z/RB_\theta(r)$ — коэффициент запаса устойчивости. Рассмотрим возмущение $m = 1$ с радиусом сингулярности $r = r_s(q(r_s) = m/n)$. В этом случае смещение $\xi_r = \text{const}$ для $0 < r < r_s$ и $\xi_r = 0$ для $r_s < r < a$ (см. разд. 8.3b). Тогда $\delta W_{\text{MHDcyl}}^{\text{ext}}$ сводится к [2]

$$\frac{\delta W_{\text{MHDcyl}}^{\text{ext}}}{2\pi R} = \frac{\pi B_{\theta s}^2}{2\mu_0} |\xi_s|^2 \left(\frac{r_s}{R} \right)^2 \left(-\beta_p - \int_0^1 \rho^3 \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} - 3 \right) d\rho \right), \quad (14.6)$$

где $\rho = r/r_s$, $\beta_p \equiv \langle p \rangle_s / (B_{\theta s}^2 / 2\mu_0)$ и $B_{\theta s} \equiv (r_s / Rq(r_s))B_z$ — полоидальное поле при $r = r_s$. Давление $\langle p \rangle_s$ определяется как

$$\langle p \rangle_s = - \int_0^{r_s} \left(\frac{r}{r_s} \right)^2 \frac{dp}{dr} dr = \frac{1}{r_s^2} \int_0^{r_s} (p - p_s) 2r dr. \quad (14.7)$$

В торе с круглым сечением МГД составляющая потенциальной энергии на единицу длины тороидального плазменного шнура дается выражением [3]

$$\frac{\delta W_{\text{MHDtor}}^{\text{ext}}}{2\pi R} = \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{\delta W_{\text{MHDcyl}}^{\text{ext}}}{2\pi R} + \frac{\pi B_{\theta s}^2}{2\mu_0} |\xi_s|^2 \delta \widehat{W}_T, \quad (14.8)$$

$$\delta \widehat{W}_T = \pi \left(\frac{r_s}{R} \right)^2 3(1 - q_0) \left(\frac{13}{144} - \beta_{ps}^2 \right).$$

В случае $m = 1$ и $n = 1$ величина $\delta W_{\text{MHDtor}}^{\text{ext}} / 2\pi R$ сводится к слагаемому $\delta \widehat{W}_T$.

Рассмотрим вклад сингулярной области. В этом случае мы должны найти смещение ξ_r в сингулярной области вблизи резонансной поверхности. Соответствующее уравнение движения рассматривалось в разд. 9.1 для тиринг-неустойчивости. Из (9.13) и (9.9) имеем в пределе $x \ll 1$

$$\mu_0 \rho_m \gamma^2 \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial x^2} = iF \frac{\partial^2 B_{1r}}{\partial x^2}, \quad (14.9)$$

$$\gamma B_{1r} = iF \gamma \xi_r + \frac{\eta}{\mu_0 r_s^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} B_{1r}, \quad (14.10)$$

где

$$\begin{aligned}
 F \equiv (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{-m}{r} B_\theta + \frac{n}{R} B_z = \frac{B_\theta}{r} (-m + nq) = \\
 &= \frac{B_\theta n}{r} \frac{dq}{dr} \Delta r = \frac{B_\theta n s}{r_s} x, \\
 x &\equiv \frac{r - r_s}{r_s}, \quad s \equiv r_s \left. \frac{dq}{dr} \right|_{r_s}.
 \end{aligned}$$

Используя нормировки

$$\begin{aligned}
 \psi &\equiv \frac{i B_{1r} r_s}{B_{\theta, s} s n}, \quad \tau_{A\theta} \equiv \frac{r_s}{(B_\theta^2 / \mu_0 \rho_m)^{1/2}}, \\
 \tau_R &\equiv \frac{\mu_0 r_s^2}{\eta}, \quad S_R \equiv \frac{\tau_R}{\tau_{A\theta}},
 \end{aligned}$$

имеем

$$\gamma^2 \left(\frac{\tau_{A\theta}}{n s} \right)^2 \xi_r'' = x \psi'', \quad \psi = -x \xi_r + \frac{1}{\gamma \tau_{A\theta} S_R} \psi''. \quad (14.11)$$

В пределе $S_R \rightarrow \infty$ (14.11) дает

$$\left(\left(\gamma \frac{\tau_{A\theta}}{n s} \right)^2 + x^2 \right) \xi_r'' + 2x \xi_r' = 0,$$

и решение [4]

$$\begin{aligned}
 \xi_r' &= \frac{(\xi_0 / \pi) (\gamma \tau_{A\theta} / n s)^{-1}}{x^2 / (\gamma \tau_{A\theta} / n s)^2 + 1}, \\
 \xi_r(x) &= \xi_\infty - \frac{\xi_0}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x}{\gamma \tau_{A\theta} / (n s)} \right). \quad (14.12)
 \end{aligned}$$

Поскольку внешнее решение для $m = 1$ есть просто $\xi_r = \xi_s$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\xi_r = 0$ при $x \rightarrow \infty$, то из условий сшивки с этим внешним решением находим $\xi_\infty = \xi_s / 2$ и $\xi_0 = \xi_s$.

В сингулярной области

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta W_{\text{MHD}}^s}{2\pi R} &= \frac{\pi}{2\mu_0} \int_{r_s - \Delta}^{r_s + \Delta} r^3 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})^2 \left(\frac{\partial \xi_r}{\partial r} \right)^2 dr = \\
 &= \frac{\pi}{2\mu_0} \frac{B_{\theta s}^2}{2\pi} s n \gamma \tau_{A\theta} |\xi_s|^2. \quad (14.13)
 \end{aligned}$$

Выражение (14.13) получено для цилиндрической плазмы. Для тороидальной плазмы $\tau_{A\theta}$ заменяется на $3^{1/2} r_s / (B_\theta^2 / \mu_0 \rho)^{1/2}$, где

$3^{1/2}$ — значение обычного тороидального множителя $(1 + 2q^2)^{1/2}$ (см. [6]).

Таким образом, общая сумма МГД вкладов моды $m = 1$, $n = 1$ (предполагается $\gamma\tau_{A\theta} \ll 1$):

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{МНД}} + \delta I &= 2\pi R \frac{B_{\theta s}^2}{2\mu_0} |\xi_s|^2 \left(\delta \widehat{W}^T + \gamma\tau_{A\theta} \frac{s}{2} + \pi\gamma^2 \tau_{A\theta}^2 \right) \approx \\ &\approx 2\pi R \frac{B_{\theta s}^2}{2\mu_0} |\xi_s|^2 \left(\delta \widehat{W}^T + \gamma\tau_{A\theta} \frac{s}{2} \right). \end{aligned} \quad (14.14)$$

14.1с. Энергия горячей компоненты

Возмущенная функция распределения горячей компоненты δF_h дается гирокинетическим уравнением в приближении малой бета и нулевого гирорадиуса в следующем виде [5]:

$$\begin{aligned} \delta F_h &\equiv \frac{e}{m} \delta\phi \frac{\partial}{\partial E} F_{0h} + \delta H_h, \\ \left(v_{\parallel} \frac{\partial}{\partial l} - i(\omega - \widehat{\omega}_{\text{dh}}) \right) \delta H_h &= i \frac{e}{m} Q (\delta\phi - v_{\parallel} \delta A_{\parallel}), \end{aligned} \quad (14.15)$$

где $\delta A_{\parallel} = (-i/\omega) \partial \delta\phi / \partial l$ из-за $E_{\parallel} = 0$ (см. (14.43)) и

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{v^2}{2}, \quad \mu \equiv \frac{v_{\perp}^2}{2B}, \quad \omega_c \equiv \frac{eB}{m}, \\ Q &\equiv \left(\omega \frac{\partial}{\partial E} + \widehat{\omega}_{*h} \right) F_{0h}, \quad \widehat{\omega}_{\text{dh}} \equiv -i \mathbf{v}_{\text{dh}} \cdot \nabla, \\ \mathbf{v}_{\text{dh}} &\equiv \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \frac{m}{eB} (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\kappa}), \\ \widehat{\omega}_{*h} &\equiv -i\omega_c^{-1} \frac{\mathbf{b} \times \nabla F_{0h}}{F_{0h}} \cdot \nabla \approx \frac{-m}{eBr} \frac{1}{F_{0h}} \frac{\partial}{\partial r}. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{v}_{dh} — скорость магнитного дрейфа и $|\widehat{\omega}_{\text{dh}}|$ — отвечающая ей частота. $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}$ — вектор, направленный к центру кривизны магнитной силовой линии и равный по модулю R^{-1} (см. разд. 2.4), $\delta\phi$ — скалярный потенциал, градиент которого $\nabla \delta\phi = -i\omega \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}$. Полагая

$$\delta H_h = -\frac{1}{\omega} \frac{e}{m} Q \delta\phi + \delta G_h, \quad (14.16)$$

имеем

$$v_{\parallel} \frac{\partial \delta H_h}{\partial l} = i(\omega - \widehat{\omega}_{\text{dh}}) \delta G_h + i \frac{\widehat{\omega}_{\text{dh}}}{\omega} \frac{e}{m} Q \delta\phi - \frac{1}{\omega^2} \frac{e}{m} v_{\parallel} \frac{\partial \delta\phi}{\partial l}.$$

Усреднение $\bar{A} \equiv \oint (A/v_{\parallel}) dl / \oint dl/v_{\parallel}$ обеих сторон предыдущего уравнения дает

$$\delta G_h = -\frac{e}{m} Q \frac{1}{\omega - \bar{\omega}_{dh}} \frac{\bar{\omega}_{dh} \delta \phi}{\omega} \quad (14.17)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\omega}_{dh} \delta \phi}{\omega} &= -\frac{i}{\omega} \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{eB} (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\kappa}) \cdot \nabla \delta \phi = \\ &= -\frac{1}{\omega} \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{eB} (\mathbf{b} \times \boldsymbol{\kappa}) \cdot \omega (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) = \\ &= \frac{m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{e} (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}) = -\frac{m}{e} J v^2 = -\frac{m}{e} 2EJ, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J &\equiv \frac{-1}{v^2} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) (\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}) \approx \\ &\approx \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{v^2} \frac{(\cos \theta \xi_r + \sin \theta \xi_{\theta})}{R} \sim \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{v^2} \frac{e^{-i\theta} \xi_r}{R}. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Заметим, что частоты ω , ω_{dh} гораздо меньше пролетной и баунс-частот горячего иона v_{\parallel}/R , $\epsilon^{1/2} v/qR$. Для пролетных (δG_{hu}) и запертых (δG_{ht}) частиц соответственно имеем

$$\delta G_{hu} \approx 0, \quad \delta G_{ht} \approx 2QE \frac{\bar{J}}{\omega - \bar{\omega}_{dh}}. \quad (14.19)$$

Тензор возмущения давления, связанный с горячей ионной компонентой,

$$\delta P_h = -\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla (P_{\perp} I + (P_{\parallel} - P_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b}) + \delta P_{\perp} I + (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) \mathbf{b} \mathbf{b}, \quad (14.20)$$

где

$$\begin{aligned} \delta P_{\perp} &= \int \frac{m v_{\perp}^2}{2} \delta F_h 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}, \\ \delta P_{\parallel} &= \int m v_{\parallel}^2 \delta F_h 2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel}. \end{aligned}$$

Первый член в правой части (14.20) имеет форму, похожую на вклад давления основной плазмы. Поскольку β_h горячей ионной компоненты гораздо меньше, чем β_c основной плазмы, первым членом в (14.20) можно пренебречь. Вводя $E = v^2/2$, $\mu = v_{\perp}^2/2B$ и $\alpha \equiv \mu/E$, имеем

$$v_{\parallel}^2 = 2E(1 - \alpha B), \quad v_{\perp}^2 = 2B\alpha E,$$

$$2\pi v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} = 2^2 \pi \frac{BE}{v_{\parallel}} dE d\alpha = 2^{3/2} \pi B \frac{E^{1/2}}{(1-\alpha B)^{1/2}} d\alpha dE.$$

Возмущение давления горячей ионной компоненты сводится к

$$\begin{aligned} \delta P_{\perp} &= 2^{3/2} \pi B \int \frac{E^{1/2}}{(1-\alpha B)^{1/2}} d\alpha dE m \alpha B E \delta F_h = \\ &= 2^{5/2} m B \int_{B_{\max}^{-1}}^{B^{-1}} d\alpha (1-\alpha B)^{1/2} \int_0^E dE E^{3/2} \frac{\alpha B}{2(1-\alpha B)} \delta F_h, \quad (14.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P_{\parallel} &= 2^{3/2} \pi B \int \frac{E^{1/2}}{(1-\alpha B)^{1/2}} d\alpha dE m 2E (1-\alpha B) \delta F_h = \\ &= 2^{5/2} m B \int_{B_{\max}^{-1}}^{B^{-1}} d\alpha (1-\alpha B)^{1/2} \int_0^E dE E^{3/2} \delta F_h. \quad (14.22) \end{aligned}$$

Дивергенция второго слагаемого с давлением в (14.20) равна (см. Приложение А)

$$\begin{aligned} (\nabla \delta P_h)_{\beta} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial \delta P_{\perp}}{\partial x_{\alpha}} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} \frac{\partial (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp})}{\partial x_{\alpha}} b_{\alpha} b_{\beta} + \\ &\quad + (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) \sum_{\alpha} (b_{\alpha} b_{\beta}) = \\ &= \frac{\partial \delta P_{\perp}}{\partial x_{\beta}} + b_{\beta} (\mathbf{b} \cdot \nabla) (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) + (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) ((\mathbf{b} \cdot \nabla) b_{\beta} + b_{\beta} (\nabla \cdot \mathbf{b})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \delta P_h)_{\perp} &= \nabla_{\perp} \delta P_{\perp} + (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} = \\ &= \nabla_{\perp} \delta P_{\perp} + (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) \boldsymbol{\kappa}, \quad (14.21') \end{aligned}$$

$$(\nabla \delta P_h)_{\parallel} = \nabla_{\parallel} \delta P_{\perp} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) + (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) \nabla \cdot \mathbf{b}. \quad (14.22')$$

Кинетический интеграл

$$\begin{aligned} \delta W_K &= \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi}_{\perp}^* \cdot \nabla \delta P dr = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi}_{\perp}^* \cdot (\nabla_{\perp} \delta P_{\perp} + (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) \boldsymbol{\kappa}) dr = \\ &= -\frac{1}{2} \int \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp}^* \delta P_{\perp} - (\delta P_{\parallel} - \delta P_{\perp}) \boldsymbol{\xi}_{\perp}^* \cdot \boldsymbol{\kappa} dr = \\ &= -2^{3/2} \pi m \int dr B \int d\alpha dE \frac{E^{3/2}}{(1-\alpha B)^{1/2}} \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\nabla \cdot \xi_{\perp}^* \frac{v_{\perp}^2}{2v^2} - (\xi_{\perp}^* \cdot \kappa) \frac{v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2/2}{v^2} \right) \delta F_{\text{h}}.$$

Поскольку $\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2(\xi \cdot \kappa) \approx 0$ (см. (B.7)), то член в скобках в подынтегральном выражении

$$(\dots) = -\frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2}{v^2} (\xi_{\perp}^* \cdot \kappa) \approx -\frac{1}{2} (\xi_{\perp}^* \cdot \kappa),$$

и δW_{K} сводится к

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_{\text{K}}}{2\pi R} &= -\frac{2^{3/2}\pi}{2\pi R} m_{\text{h}} \int dr B \int d\alpha dE \frac{E^{3/2}}{(1-\alpha B)^{1/2}} \frac{\bar{J}^* Q E \bar{J}}{\omega - \widehat{\omega}_{\text{dh}}} = \\ &= -2^{5/2}\pi^2 m_{\text{h}} \int dr r \frac{1}{2\pi} \int d\theta B \int d\alpha dE \frac{E^{3/2}}{(1-\alpha B)^{1/2}} \frac{\bar{J}^* Q E \bar{J}}{\omega - \widehat{\omega}_{\text{dh}}} = \\ &= -2^{7/2}\pi^2 m_{\text{h}} \int_0^{r_{\text{s}}} dr r \int_{(1-r/R)}^{(1+r/R)} d(\alpha B) \int dE K_{\text{b}} E^{5/2} \frac{\bar{J}^* Q E \bar{J}}{\omega - \widehat{\omega}_{\text{dh}}} \approx \\ &\approx 2^{3/2}\pi^2 m_{\text{h}} \frac{|\xi_{\perp}^2}{R^2} \int_0^{r_{\text{s}}} dr r \int d(\alpha B) \int dE E^{5/2} \frac{K_{\text{b}}^2}{K_{\text{b}} \widehat{\omega}_{\text{dh}} - \omega} \frac{Q}{\omega} \equiv \frac{B_{\theta_{\text{s}}}^2}{2\mu_0} |\xi_{\text{s}}|^2 \delta \widehat{W}_{\text{K}}, \end{aligned} \quad (14.23)$$

где

$$K_{\text{b}} = \oint \frac{d\theta}{2\pi} \frac{1}{(1-\alpha B)^{1/2}} = \oint \frac{d\theta}{2\pi} \frac{v}{v_{\parallel}}, \quad K_2 = \oint \frac{d\theta}{2\pi} \frac{\cos \theta}{(1-\alpha B)^{1/2}}.$$

Таким образом, дисперсионное соотношение (14.3) сводится к

$$\frac{-i\omega}{\omega_{\text{A}}} + \delta \widehat{W}^{\text{T}} + \delta \widehat{W}_{\text{K}} = 0, \quad (14.24)$$

где $\omega_{\text{A}} \equiv (\tau_{\text{A}} s/2)^{-1}$ и γ заменено на $-i\omega$.

14.1d. Инкремент фишбон-неустойчивости

Предположим модельное распределение для горячих ионов, замедляющихся с начальной скорости $v_{\text{mx}} = (2E)_{\text{mx}}^{1/2}$:

$$F_{\text{h}0} = c_0 \frac{\delta(\alpha - \alpha_0)}{E^{3/2}} \quad (E < E_{\text{mx}}). \quad (14.25)$$

Тогда давление p_{h} и плотность n_{h} горячих ионов

$$p_{\text{h}} = \int 2^{3/2}\pi B \frac{E^{1/2}}{(1-\alpha B)^{1/2}} d\alpha dE (mE) F_{\text{h}0} =$$

$$= c_0 \int_0^{E_{\text{mx}}} 2^{3/2} \pi B \frac{m}{(1 - \alpha_0 B)^{1/2}} dE, \quad (14.26)$$

$$p_h = c_0 2^{3/2} \pi B m K_b E_{\text{mx}}, \quad c_0 = \frac{p_h}{2^{3/2} \pi B m K_b E_{\text{mx}}}, \quad (14.27)$$

$$\begin{aligned} n_h &= \int_{T_c}^{E_{\text{mx}}} 2^{3/2} \pi B \frac{E^{1/2}}{(1 - \alpha B)^{1/2}} d\alpha dE F_{h0} = \\ &= c_0 2^{3/2} \pi B m K_b E_{\text{mx}} = p_h \frac{\ln(E_{\text{mx}}/T_c)}{E_{\text{mx}}}. \end{aligned} \quad (14.28)$$

Кинетический интеграл равен

$$\begin{aligned} \frac{\delta W_K}{2\pi R} &= \frac{r_s^2}{R^2} |\xi_s|^2 \frac{1}{r_s^2} \int_0^{r_s} dr r \int dE 2^{3/2} \pi^2 m B E^{5/2} \left(\frac{K_2^2}{K_b} \right) \times \\ &\quad \times \frac{-(3/2)\omega c_0 E^{-5/2} - (\partial c_0 / \partial r)(m/eBr) E^{-3/2}}{mE/(2eBRr) - \omega} = \\ &= \frac{r_s^2}{R^2} \frac{B^2}{2\mu_0} |\xi_s|^2 \frac{1}{r_s^2} \int_0^{r_s} dr r \pi \frac{K_2^2}{K_b^2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{E_{\text{mx}}} \int_0^{E_{\text{mx}}} dE \frac{-(3/2)\beta_h - 2(\partial\beta_h/\partial r)R(mE/2eBRr\omega)}{mE/(2eBRr\omega) - 1} = \\ &= \frac{r_s^2}{R^2} \frac{B^2}{2\mu_0} |\xi_s|^2 \frac{1}{r_s^2} \int_0^{r_s} dr r \pi \frac{K_2^2}{K_b^2} \frac{\omega}{\omega_{\text{dh,max}}} \left(-(3/2)\beta_h \int_0^{y_{\text{mx}}} \frac{dy}{y-1} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial\beta_h}{\partial r} R \int \frac{y dy}{y-1} \right) = \\ &= \frac{B_{\theta s}^2}{2\mu_0} |\xi_s|^2 \frac{\pi}{2} \frac{K_2^2}{K_b^2} \left((-3/2)\langle\beta_h\rangle \frac{\omega}{\omega_{\text{dh,max}}} \ln \left(1 - \frac{\omega_{\text{dh,max}}}{\omega} \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left\langle \frac{\partial\beta_h}{\partial r} \right\rangle R \left(1 + \frac{\omega}{\omega_{\text{dh,max}}} \ln \left(1 - \frac{\omega_{\text{dh,max}}}{\omega} \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (14.29)$$

Поскольку второй член в $\langle(\partial\beta_h/\partial r)\rangle R$ доминирует, дисперсионное соотношение сводится к

$$-i\Omega \frac{\omega_{\text{dh,max}}}{\omega_A} + \delta\widehat{W}^T + \pi \frac{K_2^2}{K_b^2} \left\langle -\frac{\partial\beta_h}{\partial r} \right\rangle R \left(1 + \Omega \ln \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right) \right) = 0, \quad (14.30)$$

где

$$\Omega \equiv \frac{\omega}{\omega_{\text{dh,mx}}}, \quad \omega_{\text{dh,mx}} \equiv \frac{mv_{\text{mx}}^2/2}{eBRr}, \quad \beta_{\text{h}} \equiv \frac{p_{\text{h}}}{B^2/2\mu_0}.$$

Рассмотрим случай $\delta\widehat{W}^{\text{T}} = 0$. Тогда (14.30) преобразуется в

$$-i\alpha_{\text{h}}\Omega + \Omega \ln\left(1 - \frac{1}{\Omega}\right) + 1 = 0, \quad (14.31)$$

где

$$\alpha_{\text{h}} \equiv \frac{\omega_{\text{dh,mx}}}{\omega_{\text{A}}} \left(\pi \frac{K_2^2}{K_b^2} \left\langle -\frac{\partial\beta_{\text{h}}}{\partial r} \right\rangle R \right)^{-1}.$$

В предположении $(1 - 1/\Omega_{\text{r}}) < 0$ и $|\Omega_{\text{i}}| \ll |\Omega_{\text{r}}|$, уравнение (14.31) сводится к

$$-i\alpha_{\text{h}}(\Omega_{\text{r}} + i\Omega_{\text{i}}) + (\Omega_{\text{r}} + i\Omega_{\text{i}}) \left(\ln\left(\frac{1}{\Omega_{\text{r}}} - 1\right) + \pi i - \frac{\Omega_{\text{i}}}{(1/\Omega_{\text{r}} - 1)\Omega_{\text{r}}^2} i \right) + 1 = 0. \quad (14.32)$$

Из действительной и мнимой частей (14.32) имеем

$$\Omega_{\text{i}} = \frac{\pi - \alpha_{\text{h}}}{-\ln(1/\Omega_{\text{r}} - 1) + (1 - (1/\Omega_{\text{r}}))} \Omega_{\text{r}}, \quad (14.33)$$

$$\Omega_{\text{r}} = \frac{1 - (\pi - \alpha_{\text{h}})\Omega_{\text{i}}}{-\ln(1/\Omega_{\text{r}} - 1)}. \quad (14.34)$$

В состоянии граничной устойчивости $\alpha_{\text{h}} = \pi$, т. е. $\Omega_{\text{i}} = 0$, величина Ω_{r} дается выражением

$$\Omega_{\text{r}} = \frac{1}{-\ln(1/\Omega_{\text{r}} - 1)} \rightarrow \Omega_{\text{r}} = \frac{1}{1 + \exp(-1/\Omega_{\text{r}})} = \frac{1}{2} \left(1 + \text{th} \frac{1}{2\Omega_{\text{r}}} \right),$$

и $\Omega_{\text{r}} \approx 0,75$. Для возбуждения фишбон-неустойчивости необходимо $\Omega_{\text{i}} > 0$, т. е. $\alpha_{\text{h}} < \pi$ и

$$\left\langle -\frac{\partial\beta_{\text{h}}}{\partial r} \right\rangle r_{\text{s}} > \frac{r_{\text{s}} \omega_{\text{dh,mx}}}{R \omega_{\text{A}}} \frac{1}{\pi^2} \frac{K_b^2}{K_2^2}.$$

У этой неустойчивости есть порог по величине $\langle |\partial\beta_{\text{h}}/\partial r| \rangle r_{\text{s}}$.

Банановые орбиты запертых ионов дрейфуют в тороидальном направлении, как показано на рис. 14.1. Скорость и частота их тороидальной прецессии равны¹⁾

¹⁾ Вертикальная компонента тороидальной дрейфовой скорости есть $v_{\text{d}} = (mv_{\perp}^2/2eBR)$, так что полоидальное смещение частиц между точками возврата равно $r\delta\theta \sim v_{\text{d}}\tau_{\text{d}}$, и τ_{d} — баунс-период. Поскольку вдоль магнитной силовой линии $d\phi/d\theta = q$, то соответствующее тороидальное смещение между

$$v_\phi = \frac{mv_\perp^2/2}{eBr}, \quad \omega_\phi = \frac{mv_\perp^2/2}{eBRr}. \quad (14.35)$$

Следовательно, $\omega_{\text{dh,мх}}$ равна частоте тороидальной прецессии запертых ионов с начальной (максимальной) скоростью.

Похоже, что фишбон-неустойчивость обусловлена взаимодействием частиц высокой энергии с МГД возмущениями $m = 1$, $n = 1$. Взаимодействие резонансного типа характеризуется затуханием Ландау. Резонанс имеет место между тороидальной скоростью волны и скоростью тороидальной прецессии частиц высокой энергии.

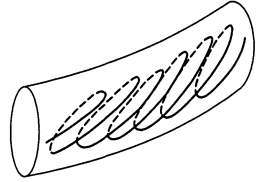


Рис. 14.1. Тороидальная прецессия банановой орбиты запертых ионов

§ 14.2. ТАЕ-моды

Альфвеновские волны в однородном магнитном поле и в бесконечной плазме рассматривались нами в разд. 5.4. В этом случае возникают шировая (сдвиговая) альфвеновская, быстрая и медленная магнитозвуковые волны. В несжимаемой плазме ($\nabla \cdot \xi = 0$ или показатель адиабаты $\gamma \rightarrow \infty$) может существовать только шировая альфвеновская волна.

В случае цилиндрической плазмы в симметричном магнитном поле МГД смещение $\xi(r, \theta, z) = \xi(r) \exp i(-m\theta + kz - \omega t)$ описывается уравнениями Хайна—Люста (8.114)–(8.117), как уже обсуждалось в разд. 8.4. Для несжимаемой плазмы уравнение Хайна—Люста (8.117) сводится к

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2}{m^2/r^2 + k^2} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\xi_r) + (-F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2) + \\ + 2B_\theta \frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta}{r} \right) + \frac{4k^2 B_\theta^2 F^2}{r^2(m^2/r^2 + k^2)(F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2)} + \\ + 2r \frac{d}{dr} \left(\frac{(m/r)FB_\theta}{r^2(m^2/r^2 + k^2)} \right) \xi_r = 0, \quad (14.36) \end{aligned}$$

где

$$F = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) = \left(\frac{-m}{r} B_\theta(r) + \frac{n}{R} B_z(r) \right) = \frac{B_z}{R} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right),$$

точками поворота $Rd\phi = (Rqv_d\tau_a/r)$, $q = 1$. Таким образом, скорость тороидальной прецессии дается выражением (14.35). — *Примеч. автора*

$$q(r) = \frac{R B_z}{r B_\theta}.$$

Точка, в которой справедливо соотношение $F^2 - \mu_0 \rho_m \omega^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2$, $v_A^2 \equiv B^2 / \mu_0 \rho_m$ отвечает положению (радиусу) сингулярности. Как было показано Хасегавой и Ченом [7], при этом радиусе (в резонансном слое) шировая альфвеновская волна за счет конверсии мод превращается в кинетическую альфвеновскую волну и поглощается вследствие затухания Ландау. Поэтому в цилиндрической плазме альфвеновская волна устойчива.

Альфвеновские волны также рассматривались в разделах 10.4а, 10.4б в модели холодной плазмы. Дисперсионное соотношение для бесконечной плазмы дано в (10.64'). Оно показывает, что альфвеновский резонанс возникает при $\omega^2 \approx k_{\parallel}^2 v_A^2$, а отсечка сжимаемой и шировой альфвеновских волн происходит при $\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 (1 + \omega / \Omega_i)$ и $\omega^2 = k_{\parallel}^2 v_A^2 (1 - \omega / \Omega_i)$ соответственно.

14.2а. Собственные альфвеновские моды, индуцированные тороидальностью

Рассмотрим шировые альфвеновские волны в тороидальной плазме и возмущение моды $(-m, n)$ вида

$$\phi(r, \theta, z, t) = \phi(r) \exp i(-m\theta + n \frac{z}{R} - \omega t), \quad (14.37)$$

где R — большой радиус тора. Введем

$$k_{\parallel} = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}}{B} = \frac{1}{R} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right).$$

Условия резонанса для m и $m + 1$ мод в линейной цилиндрической плазме

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 &= 0, \\ \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m+1}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Однако в тороидальной плазме волна моды m может быть зацеплена, как будет показано в данном разделе, с $m \pm 1$, поскольку амплитуда тороидального поля меняется как $B_z = B_{z0}(1 - (r/R) \cos \theta)$. При этом условие резонанса мод m и $m + 1$

в тороидальной плазме принимает вид

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 & \alpha \epsilon \frac{\omega^2}{v_A^2} \\ \alpha \epsilon \frac{\omega^2}{v_A^2} & \frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m+1}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $\epsilon = r/R$ и α — константа порядка единицы. Отсюда находим решения

$$\frac{\omega_{\pm}^2}{v_A^2} = \frac{k_{\parallel m}^2 + k_{\parallel m+1}^2 \pm ((k_{\parallel m}^2 - k_{\parallel m+1}^2)^2 + 4\alpha\epsilon^2 k_{\parallel m}^2 k_{\parallel m+1}^2)^{1/2}}{2(1 - \alpha^2 \epsilon^2)}. \quad (14.38)$$

Условие резонанса (14.38) представлено на рис. 14.2. Для радиуса такого, что $k_{\parallel m}^2 = k_{\parallel m+1}^2$, разность частот ω_{\pm} становится минимальной. Этот радиус дается уравнением

$$\frac{1}{R} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right) = -\frac{1}{R} \left(n - \frac{m+1}{q(r)} \right),$$

$$q(r_0) = \frac{m+1/2}{n}, \quad k_{\parallel m} = -k_{\parallel m+1} = \frac{1}{2q(r_0)R}. \quad (14.39)$$

Для случая $m = 1$ и $n = 1$ величина $q(r_0) = 1,5$. В диапазоне частот $\omega_- < \omega < \omega_+$ альфвеновский резонанс не существует.

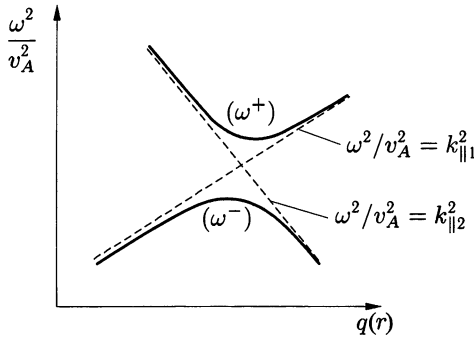


Рис. 14.2. Альфвеновская резонансная частота ω тороидально зацепленных мод m и $m + 1$

Континуум в частотном спектре альфвеновских волн соответствует возбуждению шировых альфвеновских волн на заданной потоковой поверхности, где частота моды резонанса, $\omega^2 = k_{\parallel m}^2 v_A^2(r)$, и этот резонанс приводит к затуханию волны. Однако частоты, возбужденные в спектральных «зазорах», не резонируют с континуумом и, следовательно, не затухают в этих

«зазорах». В результате возможно существование дискретной собственной частоты *альфвеновской волны, связанной с тороидальностью*, или *тороидальной альфвеновской собственной моды* (Toroidicity induced Alfvén Eigenmode— TAE). Эта TAE-мода может легко быть дестабилизирована кинетическим эффектом частиц высокой энергии.

Уравнения для TAE-моды напомним, следуя работе Берка, Ван Дама, Гао и Линдберга [8]. Уравнения для возмущений первого порядка:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_1 = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_1, \quad (14.40)$$

$$\mathbf{E}_1 = \nabla \phi_1 - \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1. \quad (14.41)$$

Для идеальных МГД волн с низким β справедливо

$$\mathbf{E}_{\parallel} = 0, \quad \mathbf{B}_{\parallel} = 0, \quad \mathbf{A}_1 = A_{\parallel} \mathbf{b}, \quad (14.42)$$

так что

$$i\omega A_{\parallel} = \mathbf{b} \cdot \nabla \phi_1, \quad \mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{b}}{B}. \quad (14.43)$$

Из (14.40) имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\perp 1} + \nabla \cdot (j_{\parallel 1} \mathbf{b}) = 0 \quad (14.44)$$

и

$$-i\omega\rho(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{b}) = (\mathbf{j}_{\perp 1} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{b} + (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{b},$$

$$\mathbf{j}_{\perp 1} = -\frac{i\omega\rho}{B^2} \mathbf{E}_{\perp 1} + \frac{j_{\parallel}}{B} \mathbf{B}_{\perp 1}. \quad (14.45)$$

Уравнения (14.41)–(14.43) дают

$$\mathbf{B}_{\perp 1} = \nabla \times (A_{\parallel} \mathbf{b}) = \nabla \left(\frac{A_{\parallel}}{B} \right) \times \mathbf{B} + \frac{A_{\parallel}}{B} \nabla \times \mathbf{B} \approx$$

$$\approx \frac{-i}{\omega} \nabla \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \nabla \phi_1}{B} \right) \times \mathbf{B}, \quad (14.46)$$

$$j_{\parallel 1} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{j}_1 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{B}_{\perp 1} =$$

$$= \frac{-i}{\omega\mu_0} \mathbf{b} \cdot \nabla \times \left(B^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \phi_1}{B^2} \right) \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) =$$

$$= \frac{i}{\omega\mu_0} \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right) \nabla \cdot \left(B^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi_1}{B^2} \right) \right) =$$

$$= \frac{i}{\omega\mu_0 B} \nabla \cdot \left(B^2 \nabla_{\perp} \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi_1}{B^2} \right) \right). \quad (14.47)$$

Переписываем (14.44)–(14.47) как

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(i \frac{\omega}{\mu_0} \frac{1}{v_A^2} \nabla_{\perp} \phi_1 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{j_{\parallel}}{B} \mathbf{B}_{\perp 1} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{j_{\parallel 1}}{B} \mathbf{B} \right) = 0, \\ \nabla \cdot \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} \nabla_{\perp} \phi_1 \right) + \mu_0 \nabla \cdot \left(\frac{j_{\parallel}}{B} \right) \cdot \mathbf{B} \times \nabla \cdot \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \phi_1}{B^2} \right) + \\ + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \cdot \left(\frac{1}{B^2} \nabla \cdot \left(B^2 \nabla_{\perp} \cdot \left(\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi_1}{B^2} \right) \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (14.48)$$

Введением связи между координатами (R, φ, Z) и (r, θ, ζ) в виде

$$R = R_0 + r \cos \theta, \quad Z = r \sin \theta, \quad \varphi = -\frac{\zeta}{R}$$

и обозначений

$$\begin{aligned} \phi_1(r, \theta, \zeta, t) = \sum_m \phi_m(r) \exp i(-m\theta + n\varphi - \omega t), \\ (\mathbf{b} \cdot \nabla) \phi_m = \frac{i}{R_0} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right) \phi_m = ik_{\parallel m} \phi_m, \\ k_{\parallel m} = \frac{1}{R_0} \left(n - \frac{m}{q(r)} \right), \quad E_m \equiv \frac{\phi_m}{R} \end{aligned}$$

уравнение (14.48) сводится к [8]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(r^3 \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) \frac{dE_m}{dr} \right) + \\ + r^2 E_m \frac{d}{dr} \left(\frac{\omega}{v_A} \right)^2 - (m^2 - 1) \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) r E_m + \\ + \frac{d}{dr} \left(r^3 \left(\frac{\omega}{v_A} \right)^2 \frac{2r}{R_0} \left(\frac{dE_{m+1}}{dr} + \frac{dE_{m-1}}{dr} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (14.49)$$

Как показано на рис. 14.3, структура моды характеризуется резким переходом компонент $m = 1$ и $m = 2$ в месте положения «зазора». Уравнения для мод m и $m + 1$ вблизи «зазора» сводятся к

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) \frac{dE_m}{dr} + \frac{2r}{R_0} \left(\frac{\omega}{v_A} \right)^2 \frac{dE_{m+1}}{dr} \approx 0 \\ \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m+1}^2 \right) \frac{dE_{m+1}}{dr} + \frac{2r}{R_0} \left(\frac{\omega}{v_A} \right)^2 \frac{dE_m}{dr} \approx 0; \end{aligned}$$

таким образом, резонансная частота тороидальной шировой альфвеновской моды получается из уравнения

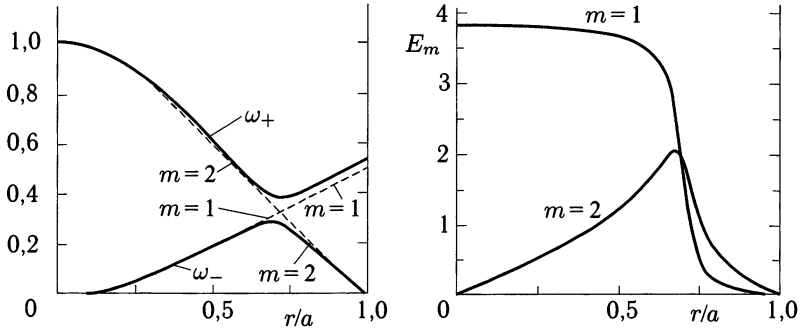


Рис. 14.3. Слева: резонансная частота тороидальной альфвеновской шировой моды Ω , соответствующая $(n = 1, m = 1)$ и $(n = 1, m = 2)$, $q(r) = 1 + (r/a)^2$, $a/R = 0,25$, $\Omega \equiv \omega/(v_A(0)/R_0)$. Справа: амплитуда глобальной моды как функция радиуса (согласно [8])

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) & 2\epsilon \left(\frac{\omega}{v_A} \right)^2 \\ 2\epsilon \left(\frac{\omega}{v_A} \right)^2 & \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m+1}^2 \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (14.50)$$

Если определить координаты (R, φ, Z) и (r, θ, ζ) с учетом сдвига Шафранова, константа связи будет равна $2,5\epsilon$ вместо 2ϵ [8].

Интеграл энергии в (14.49) без члена, описывающего зацепление мод $m \pm 1$, интегрированием по частям сводится к следующему уравнению:

$$G(\omega, E_m) \equiv \mathbf{P} \int_0^a dr r \left(r^2 \left(\frac{dE_m}{dr} \right)^2 + (m^2 - 1)E_m^2 \right) \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) - \omega^2 r E_m^2 \frac{d}{dr} \frac{1}{v_A^2} = E_m(r_s^-) C_m(r_s^-) - E_m(r_s^+) C_m(r_s^+), \quad (14.51)$$

где

$$C_m(r) = \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) r^2 \frac{dE_m}{dr}, \quad E_m(a) = 0,$$

радиус $r = r_s$ — положение особенности $(\omega^2/v_A)^2 - k_{\parallel m}^2 = 0$, и \mathbf{P} обозначает главное значение интеграла. Отсюда можно оценить декремент затухания ТАЕ [8]

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -i\pi \frac{\text{sign}(\omega_0) C_m(r_s)^2}{r_s^3 \left| \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega^2}{v_A^2} - k_{\parallel m}^2 \right) \right| \omega_0 \frac{\partial G}{\partial \omega_0}}. \quad (14.52)$$

Поскольку $\omega_0 \partial G / \partial \omega_0 > 0$, имеем $\text{Im}(\delta\omega) < 0$. Это называется затуханием континуума.

14.2б. Неустойчивость ТАЕ-мод, вызванная быстрыми частицами

Динамика частиц высокой энергии описывается в рамках кинетической теории. Согласно Бетти и Фрайдбергу [9], основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot f_j + \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_j = 0, \quad (14.53)$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{u}_j) = 0, \quad (14.54)$$

$$m_j \frac{\partial}{\partial t} (n_j \mathbf{u}_j) + \nabla \cdot P_j = q_j n_j (\mathbf{E} + \mathbf{u}_j \times \mathbf{B}), \quad (14.55)$$

$$P_j = m_j \int \mathbf{v} \mathbf{v} f_j d\mathbf{v}, \quad (14.56)$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \times (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \mathbf{B}), \quad (14.57)$$

$$\mu_0 \mathbf{j}_1 = \nabla \mathbf{B}_1 = \nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{\xi}_\perp \times \mathbf{B}), \quad (14.58)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_1 &= \sum_j (\nabla P_{1j} - i\omega m_j (n_{1j} \mathbf{u}_j + n_j \mathbf{u}_{1j})) \approx \\ &\approx \sum_j (\nabla P_{1j} - \rho \omega^2 \boldsymbol{\xi}_{\perp j}). \end{aligned} \quad (14.59)$$

Здесь F_j — равновесная функция распределения в осесимметричном торе. Предполагается, что $F_j(\varepsilon, p_\varphi)$ — функция интегралов движения ε и p_φ , где

$$\varepsilon = \frac{m_j}{2} v^2 + q_j \phi, \quad p_\varphi = m_j R v_\varphi + q_j \psi, \quad \psi = R A_\varphi, \quad (14.60)$$

$$R B_Z = \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad R B_R = -\frac{\partial \psi}{\partial Z}.$$

Уравнение для поправки к функции распределения

$$\frac{\partial f_{1j}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot f_{1j} + \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_{1j} = -\frac{q_j}{m_j} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_v F_j, \quad (14.61)$$

и

$$\nabla_v F_j = \widehat{\varphi} \frac{\partial p_\varphi}{\partial v_\varphi} \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} + (\nabla_v \varepsilon) \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} = \widehat{\varphi} m_j R \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} + m_j \mathbf{v} \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon}. \quad (14.62)$$

Решение получается интегрированием вдоль траектории частицы (см. Приложение С, разд.С.2):

$$f_{1j} = -\frac{q_j}{m_j} \int_{-\infty}^t (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_v F_j dt'. \quad (14.63)$$

Возмущения здесь имеют вид

$$Q_1 = Q_1(R, Z) \exp i(n\varphi - \omega t).$$

Второй член $m_j \mathbf{v}(\partial F_j / \partial \varepsilon)$ в правой части (14.62) дает вклад в интеграл

$$-\frac{q_j}{m_j} \int_{-\infty}^t (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot m_j \mathbf{v} \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} dt' = -q_j \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^t \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dt'.$$

Вклад первого члена $m_j R(\partial F_j / \partial p_\varphi)$ составляет

$$\begin{aligned} & -\frac{q_j}{m_j} \left(\int_{-\infty}^t E_\varphi m_j R \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} dt' + \int_{-\infty}^t m_j R (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_1)_\varphi \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} dt' \right) = \\ & = -q_j \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} \left(\int_{-\infty}^t E_\varphi R dt' + \int_{-\infty}^t \frac{R}{i\omega} (\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{E}))_\varphi dt' \right) = \\ & = -q_j \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} \left(\int_{-\infty}^t \frac{1}{-i\omega} \frac{\partial(E_\varphi R)}{\partial t} dt' + \right. \\ & \quad \left. + \int_{-\infty}^t \left(\frac{n}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{i\omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla)(E_\varphi R) \right) dt' \right) = \\ & = -q_j \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} \left(\int_{-\infty}^t \frac{1}{-i\omega} \frac{d(E_\varphi R)}{dt} dt' + \int_{-\infty}^t \frac{n}{\omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) dt' \right). \end{aligned}$$

Таким образом, решение

$$f_{1j} = -\frac{q_j}{\omega} \left(i \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} R E_\varphi + \left(\omega \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} + n \frac{\partial F_j}{\partial p_\varphi} \right) \int_{-\infty}^t (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) dt' \right). \quad (14.64)$$

Поскольку

$$E_{1\parallel} = 0, \quad -i\omega \boldsymbol{\xi}_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad \mathbf{E}_{\perp} = i\omega(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \times \mathbf{B}),$$

$$RE_{\varphi} = i\omega(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \times \mathbf{B})_{\varphi} R = i\omega(\boldsymbol{\xi}_{\perp R} B_Z - \boldsymbol{\xi}_{\perp Z} B_R) R = -i\omega(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \psi),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} &= i\omega(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = -i\omega \boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -i\omega \boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \frac{m_j}{q_j} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \\ &= -i\omega \frac{m_j}{q_j} \boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -i\omega \frac{m_j}{q_j} \left(\frac{d(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \mathbf{v})}{dt} - \mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}_{\perp}}{dt} \right), \end{aligned}$$

то для f_{1j} имеем

$$\begin{aligned} f_{1j} &= -q_j \frac{\partial F_j}{\partial p_{\varphi}} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \psi) + \\ &+ im_j \left(\omega \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} + n \frac{\partial F_j}{\partial p_{\varphi}} \right) \left(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \mathbf{v} - \int_{-\infty}^t \mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}_{\perp}}{dt} dt' \right) = \\ &= -q_j \frac{\partial F_j}{\partial \psi} + im_j (\omega - \omega_{*j}) \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} (\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \mathbf{v} - s_j), \quad (14.65) \end{aligned}$$

где

$$s_j \equiv \int_{-\infty}^t \mathbf{v} \cdot \frac{d\boldsymbol{\xi}_{\perp}}{dt} dt', \quad \omega_{*j} \equiv -\frac{n \partial F_j / \partial p_{\varphi}}{\partial F_j / \partial \varepsilon}.$$

Величина s_j , как будет показано в конце этого подраздела, равна

$$s_j = r \int_{-\infty}^t \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} - v_{\parallel}^2 \right) \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\kappa} \right) dt'. \quad (14.66)$$

Тензор возмущения давления есть

$$P_{1j} = \int m_j \mathbf{v} \mathbf{v} f_{1j} d\mathbf{v} = P_{1\perp j} I + (P_{1\parallel j} - P_{1\perp j}) \mathbf{b} \mathbf{b}, \quad (14.67)$$

и ∇P_{1j} дается соотношениями (14.21') и (14.22'). Уравнение движения принимает вид

$$-\rho \omega^2 \boldsymbol{\xi}_{\perp} = \mathbf{F}_{\perp}(\boldsymbol{\xi}_{\perp}) + i\mathbf{D}_{\perp}(\boldsymbol{\xi}_{\perp}), \quad (14.68)$$

$$\mathbf{F}_{\perp}(\boldsymbol{\xi}_{\perp}) = \mathbf{j}_1 \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_1 + \nabla(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla P_1), \quad (14.69)$$

$$\mathbf{D}_{\perp}(\boldsymbol{\xi}_{\perp}) = m_j \int \left(\frac{v_{\perp}^2}{2} \nabla_{\perp} + \left(v_{\parallel}^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \boldsymbol{\kappa} \right) (\omega - \omega_{*j}) \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} s_j d\mathbf{v}. \quad (14.70)$$

$\mathbf{F}_\perp(\boldsymbol{\xi}_\perp)$ — оператор силы в идеальной МГД для несжимаемого смещения. $\mathbf{D}_\perp(\boldsymbol{\xi}_\perp)$ содержит вклад частиц высокой энергии. Уравнения (14.68)–(14.70) описывают устойчивость низкочастотных альфвеновских волн с конечным волновым числом, возбуждаемых частицами высокой энергии в осесимметричном торе.

Интеграл энергии, следующий из (14.68), состоит из нормированной на ω^{-2} кинетической энергии плазмы K_M , из «поперечной» потенциальной энергии в приближении идеальной МГД, δW_{MHD} , и кинетического вклада δW_K :

$$\omega^2 K_M = \delta W_{\text{MHD}} + \delta W_K, \quad (14.71)$$

где

$$\begin{aligned} K_M &= \frac{1}{2} \int \rho |\boldsymbol{\xi}_\perp|^2 d\mathbf{r}, \\ \delta W_{\text{MHD}} &= -\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi}_\perp^* \mathbf{F}_\perp(\boldsymbol{\xi}_\perp) d\mathbf{r}, \\ \delta W_K &= -\frac{i}{2} \int \boldsymbol{\xi}_\perp^* \mathbf{D}_\perp(\boldsymbol{\xi}_\perp) d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

После простого интегрирования по частям δW_K может быть записана как

$$\delta W_K = \frac{i}{2} \sum_j \int (\omega - \omega_{*j}) \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} s_j \frac{ds_j^*}{dt} d\mathbf{v} d\mathbf{r}, \quad (14.72)$$

поскольку

$$\frac{ds_j^*}{dt} = m_j \left(\frac{v_\perp^2}{2} \nabla_\perp \cdot \boldsymbol{\xi}^* + \left(\frac{v_\perp^2}{2} - v_\parallel \right) \boldsymbol{\xi}_\perp \cdot \boldsymbol{\kappa} \right).$$

С другой стороны, ds_j^*/dt дается выражением

$$\frac{ds_j^*}{dt} = i\omega^* s_j^* + D s_j^*, \quad D \equiv (\mathbf{v} \cdot \nabla) + \frac{q_j}{m_j} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v.$$

Используя обозначение $s_j \equiv a_j + i c_j$ (a_j и c_j действительны), имеем

$$s_j \frac{ds_j^*}{dt} = i\omega^* |s_j|^2 + i(c_j D a_j - a_j D c_j) + \frac{1}{2} D (a_j^2 + c_j^2).$$

Вклад последнего члена в интеграл (14.72) равен нулю, поскольку F_j и ω_{*j} — функции интегралов движения ε и p_φ , и

$$\delta W_K = \frac{1}{2} \sum_j \int (\omega - \omega_{*j}) \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} (i\omega_i |s_j|^2 + R_j) d\mathbf{v} d\mathbf{r},$$

$$R_j = c_j D a_j - a_j D c_j - \omega_r |s_j|^2.$$

Нужное выражение для инкремента моды получается, если положить действительную и мнимую части (14.71) равными нулю:

$$\omega_r^2 = \frac{\delta W_{\text{MHD}}}{K_M} + O(\beta); \quad (14.73)$$

$O(\beta)$ — вклад члена с R_j . В пределе $\omega_i \ll \omega_r$ мнимая часть дает

$$\omega_i \approx \frac{W_K}{K_M},$$

$$W_K \equiv \lim_{\omega_i \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4\omega_r} \sum_j \int (\omega - \omega_{*j}) \frac{\partial F_j}{\partial \varepsilon} \omega_i |s_j|^2 d\mathbf{v} d\mathbf{r} \right). \quad (14.74)$$

Оценим (14.74). Поскольку $\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2\xi_{\perp} \cdot \kappa \approx 0$ (см. (B.7) Приложения B), величина s_j равна

$$s_j = -m_j \int_{-\infty}^t \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) (\kappa \cdot \xi_{\perp}) dt' = m_j \int_{-\infty}^t \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \frac{\xi_R}{R} dt',$$

где

$$\xi_R = \xi_r \cos \theta - \xi_{\theta} \sin \theta = \xi_r \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} - \xi_{\theta} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Компоненты ξ_r и ξ_{θ} равны ($\nabla \cdot \xi = (1/r)(\partial(r\xi_r)/\partial r) - i(m/r)\xi_{\theta} \approx 0$)

$$\xi_r = \sum_m \xi_m(r) e^{-im\theta}, \quad \xi_{\theta} = -i \sum_m \frac{(r\xi_m(r))'}{m} e^{-im\theta}.$$

Поскольку в главном порядке приближения ведущих центров для частиц высокой энергии имеем

$$r(t') = r(t), \quad \theta(t') = \frac{v_{\parallel} B_{\theta}}{r B_{\varphi}} (t' - t) + \theta(t),$$

$$\varphi(t') = \frac{v_{\parallel}}{r} (t' - t) + \varphi(t),$$

то возмущение вдоль траектории будет

$$\begin{aligned} \exp i(-m\theta(t') + n\varphi(t') - \omega t') &= \\ &= \exp \left(i \left(-\frac{m B_{\theta}}{r B_{\varphi}} v_{\parallel} + \frac{n v_{\parallel}}{R} - \omega \right) (t' - t) \right) \times \\ &\quad \times \exp i(-m\theta(t) + n\varphi(t) - \omega t) = \\ &= \exp(-i(\omega - \omega_m)(t' - t)) \exp i(-m\theta(t) + n\varphi(t) - \omega t), \end{aligned}$$

где

$$\omega_m = \frac{v_{\parallel}}{R} \left(n - \frac{m}{q} \right),$$

и

$$\begin{aligned} s_j &= \frac{m_j(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2)}{R} \frac{1}{2} \sum_m (\xi_{m-1} + \xi_{m+1} - i\xi_{\theta(m-1)} + i\xi_{\theta(m+1)}) \times \\ &\quad \times \exp i(-m\theta + n\varphi - \omega t) \int_{-\infty}^0 \exp(-i(\omega - \omega_m)t'' dt'' = \\ &= i \frac{m_j}{2R} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) \sum_m \left(\xi_{m-1} + \xi_{m+1} - i \frac{(r\xi_{m-1})'}{(m-1)} + i \frac{(r\xi_{m+1})'}{(m+1)} \right) \times \\ &\quad \times \frac{\exp i(-im\theta + n\varphi - \omega t)}{(\omega - \omega_m)}. \quad (14.75) \end{aligned}$$

Предполагается, что возмущение состоит в основном из двух тороидально зацепленных гармоник ξ_m и ξ_{m+1} , и все прочие гармоники равны нулю. Сильное зацепление происходит в узкой области толщиной $\sim \epsilon a$ около поверхности $r = r_0$, соответствующей $q(r_0) = (2m + 1)/2n = q_0$. Локализация моды подразумевает, что члены $\xi'_{m\pm 1}$ доминируют в (14.75). Подставляя эти результаты в выражение для s_j и оставляя лишь члены, которые не обращаются в нуль при усреднении по θ , получаем следующее выражение для $|s_j|^2$:

$$\begin{aligned} |s_j|^2 &= \frac{m_j^2 r_0^2}{4R} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)^2 \left(\frac{|\xi'_{(m+1)}|^2}{(m+1)^2} + \frac{|\xi'_m|^2}{m^2} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{|\omega - \omega_m|^2} + \frac{1}{|\omega - \omega_{m-1}|^2} \right) \end{aligned}$$

(учитываем, что $\omega_{m+1} = -\omega_m$ и $\omega_{m+2} = -\omega_{m-1}$). K_M дается выражением

$$K_M = \frac{r_0^2 \rho_0^2}{2} \int \left(\frac{|\xi'_m|^2}{m^2} + \frac{|\xi'_{m+1}|^2}{(m+1)^2} \right) dr. \quad (14.76)$$

Используя выражения для $\omega_r \approx k_{\parallel} v_A$, $k_{\parallel} = 1/(2q_0 R)$, $q_0 = (2m + 1/2n)$, получим инкремент

$$\frac{\omega_i}{k_{\parallel} v_A} = \lim_{\omega_i \rightarrow 0} \sum_j \frac{\mu_0 m_j^2 q_0^2}{2B^2} \int \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)^2 \left(\omega_r \frac{\partial F_j}{\partial \epsilon} + \frac{n}{q_j} \frac{\partial F_j}{\partial \psi} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\omega_i}{|\omega - \omega_m|^2} + \frac{\omega_i}{|\omega - \omega_{m-1}|^2} \right) dv. \quad (14.77)$$

С использованием формулы $\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon/(x^2 + \epsilon^2) dx = \pi$ несложное вычисление интеграла v_{\parallel} дает

$$\frac{\omega_i}{k_{\parallel} v_A} = \sum_j \frac{2\pi^2 \mu_0 m_j^2 R q_0^3}{2B^2} \int \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right)^2 \times \\ \times \left(\omega_r \frac{\partial F_j}{\partial \epsilon} + \frac{n}{q_j} \frac{\partial F_j}{\partial \psi} \right) v_{\perp} dv_{\perp} \Big|_{v_{\parallel}=v_A} + (\dots) \Big|_{v_{\parallel}=v_A/3}. \quad (14.78)$$

(Заметим, что $\omega_m = v_{\parallel}/(2q_0 R)$, $\omega_{m-1} = 3v_{\parallel}/(2q_0 R)$, $\omega_r = v_A/2q_0 R$.) Выражение (14.78) дает инкремент ТАЕ-моды для произвольной функции распределения $F_j(\epsilon, \psi)$. Второй член в (14.78) обусловлен побочным резонансом.

Инкремент легко оценить для максвелловской функции распределения

$$F_j = n_j \left(\frac{m_j}{2\pi T_j} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_j v^2}{2T_j} \right).$$

Здесь $n_j = n_j(\psi)$ и $T_j = T_j(\psi)$. Прямое вычисление приводит к выражению

$$\left(\frac{\omega_i}{k_{\parallel} v_A} \right)_j = -q_0^2 \beta_j \left(G_{mj}^T - n q_0 \delta_j \frac{H_{mj}^T + \eta_j J_{mj}^T}{1 + \eta_j} \right), \quad (14.79)$$

где

$$\beta_j = \frac{n_j T_j}{B^2/2\mu_0}, \quad \delta_j = -r_{Lpj} \frac{dp_j/dr}{p_j}, \quad r_{Lpj} \equiv \frac{m_j v_{Tj}}{q_j B_p}, \quad \eta_j \equiv \frac{d \ln T_j}{d \ln n_j}.$$

Каждая из этих величин берется при $r = r_0$. Функции G_{mj}^T , H_{mj}^T и J_{mj}^T — функции одного параметра $\lambda_j \equiv v_A/v_{Tj}$ ($v_{Tj} \equiv 2T_j/m_j$) и даются выражениями

$$G_{mj}^T = g_{mj}^T(\lambda_j) + g_{mj}^T(\lambda_j/3), \\ g_{mj}^T(\lambda_j) = (\pi^{1/2}/2) \lambda_j (1 + 2\lambda_j^2 + 2\lambda_j^4) e^{-\lambda_j^2}, \\ H_{mj}^T = h_{mj}^T(\lambda_j) + h_{mj}^T(\lambda_j/3), \\ h_{mj}^T(\lambda_j) = (\pi^{1/2}/2) (1 + 2\lambda_j^2 + 2\lambda_j^4) e^{-\lambda_j^2}, \\ J_{mj}^T = j_{mj}^T(\lambda_j) + j_{mj}^T(\lambda_j/3), \\ j_{mj}^T(\lambda_j) = (\pi^{1/2}/2) (3/2 + 2\lambda_j^2 + \lambda_j^4 + 2\lambda_j^6) e^{-\lambda_j^2}. \quad (14.80)$$

Для альфа-частиц более разумно предположить распределение, получающееся в результате замедления,

$$F_\alpha = \frac{A}{(v^2 + v_0^2)^{3/2}} \quad (0 < v < v_\alpha, \quad \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = 3,5 \text{ МэВ}).$$

A и v_0 связаны с плотностью и давлением:

$$A \approx \frac{n_\alpha}{4\pi \ln(v_\alpha/v_0)}, \quad p_\alpha \approx \frac{n_\alpha m_\alpha v_\alpha^2/2}{3 \ln(v_\alpha/v_0)}, \quad \frac{m_j v_0^2}{2} \approx T_j.$$

Прямым вычислением получаем выражение для вклада альфа-частиц в инкремент:

$$\left(\frac{\omega_i}{k_{\parallel} v_A} \right)_\alpha = -q_0^2 \beta_\alpha (G_{s\alpha}^T - nq_0 \delta_\alpha H_{s\alpha}^T), \quad (14.82)$$

где

$$\beta_\alpha = \frac{p_\alpha}{B^2/2\mu_0}, \quad \delta_\alpha = -\frac{2}{3} r_{L\alpha} \frac{dp_\alpha/dr}{p_\alpha}, \quad r_{Lp\alpha} = \frac{m_\alpha v_\alpha}{q_\alpha B_p}.$$

Функции $G_{s\alpha}^T$ и $H_{s\alpha}^T$ — функции параметра $\lambda_\alpha \equiv v_A/v_\alpha$ и определены как

$$\begin{aligned} G_{s\alpha}^T &= g_s^T(\lambda_\alpha) + g_s^T(\lambda_\alpha/3), \\ g_s^T(\lambda_\alpha) &= (3\pi/16)\lambda_\alpha(3 + 4\lambda_\alpha - 6\lambda_\alpha^2 - \lambda_\alpha^4)H(1 - \lambda_\alpha), \\ H_s^T &= h_s^T(\lambda_\alpha) + h_s^T(\lambda_\alpha/3), \\ h_{s\alpha}^T(\lambda_\alpha) &= (3\pi/16)(1 + 6\lambda_\alpha^2 - 4\lambda_\alpha^3 - 3\lambda_\alpha^4)H(1 - \lambda_\alpha), \end{aligned} \quad (14.83)$$

$H(1 - \lambda_\alpha)$ — функция Хевисайда ($H(x) = 1$ для $x > 0$, $H(x) = 0$ для $x < 0$). В окончательном виде выражение для инкремента получим, суммируя вклады ионов и электронов основной плазмы и α -частиц:

$$\frac{\omega_i}{k_{\parallel} v_A} = -q_0^2 (\beta_i G_{mi}^T + \beta_e G_{me}^T + \beta_\alpha (G_{s\alpha}^T - nq_0 \delta_\alpha H_{s\alpha}^T)), \quad (14.84)$$

где $\beta_j \equiv n_j T_j / B^2 / 2\mu_0$ относятся к ионам и электронам основной плазмы и α -частицам. Вклады ионов и электронов основной плазмы выражаются в затухании Ландау. Условие возбуждения ТАЕ-моды на границе устойчивости

$$\beta_\alpha > \frac{\beta_i G_i^T(\lambda_i)}{nq_0 \delta_\alpha H_{s\alpha}^T - G_{s\alpha}^T}, \quad \delta_\alpha > \frac{G_{s\alpha}}{nq_0 H_{s\alpha}^T}. \quad (14.85)$$

Ниже описан вывод (14.66):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{d\xi}{dt} &= \sum_i v_i \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_i v_i \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_i v_i (\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi_i = \\ &= \sum_i -i\omega v_i \xi_i + \sum_{ij} v_i v_j \frac{\partial \xi_i}{x_j}, \\ \mathbf{v} &= v_{\parallel} \mathbf{b} + v_{\perp} \cos(\Omega t) \hat{\mathbf{e}}_{\perp} - v_{\perp} \sin(\Omega t) (\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{v}\mathbf{v}} &= v_{\parallel}^2 \mathbf{b}\mathbf{b} + v_{\perp}^2 \overline{\cos^2(\Omega t) \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}} + v_{\perp}^2 \overline{\sin^2(\Omega t) (\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) (\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp})} = \\ &= (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) \mathbf{b}\mathbf{b} + (v_{\perp}^2/2) (\mathbf{b}\mathbf{b} + \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} + (\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp}) (\mathbf{b} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp})) = \\ &= (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2/2) \mathbf{b}\mathbf{b} + v_{\perp}^2/2 I, \end{aligned}$$

$$\overline{\mathbf{v} \cdot \frac{d\xi}{dt}} = -i\omega \overline{v_{\parallel} \xi_{\parallel}} + (v_{\perp}^2/2) \nabla \cdot \xi + (v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2/2) \sum_{ij} b_i b_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j},$$

$$\sum_{ij} \left(b_i b_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + b_j \xi_i \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{ij} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\xi_i b_i)$$

$$\sum_{ij} b_i b_j \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = -\xi \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) (\xi \cdot \mathbf{b}) = -\kappa \cdot \xi + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \xi_{\parallel},$$

$$\overline{\mathbf{v} \cdot \frac{d\xi}{dt}} = (v_{\perp}^2/2) \nabla \cdot \xi + (v_{\perp}^2/2 - v_{\parallel}^2) \kappa \cdot \xi_{\perp} - i\omega \overline{v_{\parallel} \xi_{\parallel}} + (v_{\parallel}^2 - v_{\perp}^2/2) \frac{\partial \xi_{\parallel}}{\partial t}.$$

Поскольку $|\xi_{\parallel}| \ll |\xi_{\perp}|$, имеем

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\xi}{dt} = (v_{\perp}^2/2) \nabla \cdot \xi + (v_{\perp}^2/2 - v_{\parallel}^2) \kappa \cdot \xi_{\perp} + a_1 e^{-i\Omega t} + \dots$$

Третий член является быстро осциллирующим, и его вклад в (14.66) мал.

14.2с. Различные альфвеновские моды

В предыдущем подразделе мы обсуждали возбуждение слабозатухающей ТАЕ частицами высокой энергии со скоростями выше альфвеновской. Существуют различные альфвеновские моды.

В высокотемпературной плазме в области «зазора» становятся важными эффекты неидеальности, такие как конечный ларморовский радиус основной плазмы, которые вызывают расщепление альфвеновского континуума на серию кинетических альфвеновских собственных мод (КТАЕ) с частотами чуть выше частоты идеальной ТАЕ [10].

Вблизи центра плазменного шнура может существовать низко-шировая разновидность ТАЕ, которую называют центрированной модой (CLM) [11].

Не круглая форма полоидального сечения плазмы приводит к образованию и других «зазоров» в альфвеновском континууме в области высоких частот. Эллиптичность дает «зазор» вблизи примерно удвоенной частоты ТАЕ, где и существует альфвеновская собственная мода, вызванная эллиптичностью (ЕАЕ) [9], и аналогично — для альфвеновской собственной моды, вызванной треугольностью (NАЕ) [9], при утроенной частоте ТАЕ.

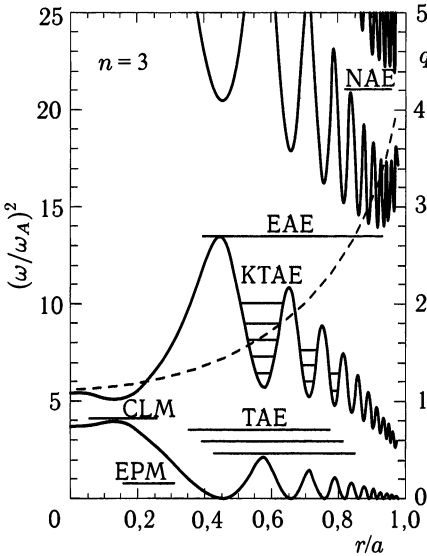


Рис. 14.4. Частоты широкой альфвеновской моды в области континуума как функции малого радиуса r . Горизонтальные линии приближенно показывают положение и ширину тороидальной альфвеновской собственной моды (ТАЕ), кинетической ТАЕ-моды (КТАЕ), центрированной ТАЕ-моды (CLM), альфвеновских собственных мод, вызванных эллиптичностью (ЕАЕ), треугольностью (NАЕ), и континуум-моды на частицах высокой энергии (ЕРМ)

Идеальная и кинетическая ТАЕ — это «полостные» моды, чьи частоты определяются основной плазмой. Кроме этого, может возникнуть еще и «пучковая мода», которая не является собственной модой как таковой, но возбуждается и поддерживается лишь в присутствии частиц высокой энергии. Эта так называемая мода на частицах высокой энергии (ЕРМ) [12], которая также может выходить за пределы «зазоров» ТАЕ, имеет частоты, связанные с частотой тороидальной прецессии и полоидальной пролетной/баунс частотой быстрых ионов. Альфвеновская собственная мода, связанная с давлением (ВАЕ) [13] существует в «зазоре», возникающем из-за конечной бета. На рис. 14.4 схематически проиллюстрированы эти различные моды.

Тесное взаимодействие теории и эксперимента привело ко многим открытиям в области

альфвеновских собственных мод в тороидальной плазме. Ряд теоретических работ был посвящен при этом раскачке мод частицами высокой энергии и конкурирующим механизмам затухания,

таким как континуум и радиационное затухание, ионное затухание Ландау для тепловых и быстрых ионов, электронное затухание и столкновительное затухание на запертых электронах. Для мод с низким и умеренным тороидальным числом n обычно доминируют затухание континуума и ионное затухание Ландау, а с ростом n сильными механизмами стабилизации становятся столкновительное затухание на запертых электронах и радиационное затухание. Имеются превосходные обзоры, посвященные тороидальным альфвеновским собственным модам [14].

Список литературы

1. *Liu Chen, White R.B., Rosenbluth M.N.* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1122; *Zhang Y.Z., Berk H.L., Mahajan S.M.* Nucl. Fusion. 1989. V. 29. P. 848.
2. *Шафранов В.Д.* ЖТФ. 1970. Т. 60. С. 241.
3. *Bussac M.N., Pellat R., Ederly D., Soule J.L.* Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 1638.
4. *Ara G., Basu B., Coppi B., Laval G., Rosenbluth M.N., Waddell B.V.* Annals of Phys. 1978. V. 112. P. 443.
5. *Catto P.J., Tang W.M., Baldwin D.E.* Plasma Phys. 1981. V. 23. P. 639.
6. *Кувшинов Б.Н., Михайловский А.Б., Татаринев Е.Г.* Физика плазмы. 1988. Т. 14. С. 409.
7. *Hasegawa A., Liu Chen.* Phys. Fluids. 1976. V. 19. P. 1924.
8. *Berk H.L., Van Dam J. W., Guo Z., Lindberg D.M.* Phys. Fluids. 1992. V. B4. P. 1806.
9. *Betti R., Freidberg J.P.* Phys. Fluids. 1992. V. B4. P. 1465.
10. *Candy J., Rosenbluth N.M.* Plasma Phys. Control. Fusion. 1993. V. 35. P. 957; *Candy J., Rosenbluth N.M.* Phys. Plasmas. 1994. V. 1. P. 356; *Mett R.R., Mahajan S.M.* Phys. Fluids. 1992. V. B4. P. 2885.
11. *Fu G.Y., Cheng C.Z.* Phys. Fluids. 1990. V. B2. P. 985; *Berk H.L., Van Dam J. W., Borba D., Candy J., Huysmans G. T.A., Sharapov S.* Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 3401.
12. *Zonca F., Chen L.* Phys. Fluids. 1993. V. B5. P. 3668; *Zonca F., Chen L.* Phys. Plasmas. 1996. V. 3. P. 323.
13. *Chu M.S., Greene J.M., Lao L.L., Turnbull A.D., Chance M.S.* Phys. Fluids. 1992. V. B4. P. 3713; *Turnbull A.D., Strait E.J., Heidbrink W. W., Chu M.S., Duong H.H., Greene J.M., Lao L.L., Taylor T.S., Thompson S.J.* Phys. Fluids. 1993. V. B5. P. 2546.
14. ITER Physics Basis: Nucl. Fusion. 1999. V. 39. No. 12. P. 2495; *Strait E.J., Heidbrink W. W., Turnbull A.D., Chu M.S., Duong H.H.* Nucl. Fusion. 1993. V. 33. P. 1849; King-Lap Wong. Plasma Phys. Control. Fusion. 1999. V. 41. P. R1; *Fukuyama A., Ozeki T. J.* Plasma Fusion Res. 1999. V. 75. P. 537. (На японском.)

ИСТОРИЯ ТЕРМОЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

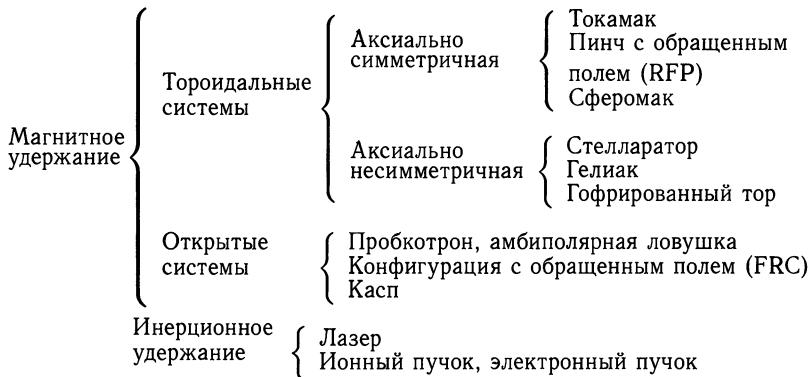
Основные успехи в области управляемого ядерного синтеза связаны с удержанием горячей плазмы сильными магнитными полями. Системы магнитного удержания разделяются на тороидальные и открытые конфигурации. Удержание в прямой пробочной ловушке (разд. 17.3) может быть более эффективным, чем тороидальное удержание, с точки зрения устойчивости и аномальной диффузии поперек магнитного поля. Однако характерные для таких систем конечные потери (т. е. потери частиц, покидающих плазму вдоль магнитных силовых линий) определяются только диффузией в пространстве скоростей, так что время удержания нельзя увеличить за счет повышения напряженности магнитного поля или увеличения размеров плазмы. Необходимо изыскивать какие-то способы подавления конечных потерь.

Тороидальные системы не имеют открытых концов. В простом тороидальном поле ионы и электроны дрейфуют в противоположных направлениях из-за градиента магнитного поля. Этот градиентный дрейф является причиной разделения зарядов, которое индуцирует электрическое поле, параллельное главной оси тора. Результирующий $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейф в скрещенных полях стремится растянуть плазменное кольцо. Для того чтобы уменьшить этот дрейф, необходимо связать верхние и нижние части плазмы магнитными силовыми линиями и «закоротить» разделенные заряды вдоль этих силовых линий. Поэтому для равновесия тороидальной плазмы наиболее существенной является полоидальная компонента магнитного поля, в связи с чем тороидальные устройства могут быть классифицированы по способу получения этого поля. В токамаке (гл. 16) и пинче с обращенным магнитным полем (разд. 17.1) используется ток, текущий по плазме вдоль тора. В стеллараторе (разд. 17.2) нужное вращательное преобразование обеспечивают внешние винтовые проводники или эквивалентные обмотки.

Кроме систем с магнитным удержанием плазмы в настоящее время активно развиваются системы с инерционным удержанием.

Если создать плотную и горячую плазму за очень короткое время, то реакции ядерного синтеза могут успеть завершиться до того, как плазма начнет расширяться (из-за инерции частицы плазмы не могут разлететься мгновенно — отсюда термин «инерционное удержание»). Самым экстремальным примером процессов такого рода служит водородная бомба. В лабораторных экспериментах мощный лазерный пучок или пучок частиц фокусируются на небольшую дейтерий-тритиевую мишень, создавая таким образом очень плотную и горячую плазму за малое время. Это направление весьма перспективно в связи с активным развитием технологий создания мощных энергетических устройств. Инерционное удержание обсуждается в гл. 18 подробнее.

Классификация различных путей получения управляемого термоядерного синтеза, активно развиваемых в настоящее время, выглядит следующим образом:



От секретности к международному сотрудничеству

Основные исследования в области управляемого термоядерного синтеза были начаты, по всей вероятности, сразу после Второй мировой войны в Соединенных Штатах, в Советском Союзе и в Великобритании в условиях строгой секретности (по поводу их начала уже в 1940-х годах имеется довольно много спекуляций). Программа Соединенных Штатов, названная Проект Шервуд, в деталях описана А. Бишопом [1]. Бишоп утверждает, что в Лос-Аламосе проводились эксперименты с линейными и тороидальными Z-пинчами, в которых были сделаны попытки преодолеть «сосисочную» и винтовую неустойчивости. В 1951 г. астрофизик Л. Спитцер начал в Принстоне разработку стелларатора в виде восьмерки. В Ливерморской национальной лаборатории проводились эксперименты с удержанием плазмы в открытой ловушке. В Управлении по исследованиям в области

атомной энергии (Харуэлл, Великобритания) начались эксперименты на установке ZETA [2], а в Советском Союзе в Институте атомной энергии — эксперименты на открытой ловушке Огра и токамаках¹⁾ (см. [3]).

В 1955 г. в Женеве была проведена Первая международная конференция по мирному использованию атомной энергии. Председатель этой конференции, посвященной в основном мирному применению энергии деления, Х. Д. Баба рискнул предположить, что пути получения индустриально применимой контролируемой реакции синтеза будут найдены меньше чем за два десятилетия. Однако исследования в области управляемого ядерного синтеза столкнулись с серьезными непредвиденными трудностями. Очень скоро было признано, что практическая реализация термоядерного реактора займет долгое время и что абсолютно необходимы фундаментальные исследования по физике плазмы и открытый международный обмен научными данными. В это же время статьи по управляемому ядерному синтезу начали появляться достаточно регулярно в научных журналах. В январе 1957 г. была опубликована статья Лоусона об условиях синтеза [4]. Появились также несколько важных работ по теории МГД неустойчивостей [5, 6]. В январе 1958 г. были опубликованы результаты экспериментов на установке ZETA [7] (Zero Energy Thermonuclear Assembly) и стеллараторе [8]. На Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии, которая проходила в Женеве с 1 по 13 сентября 1958 г. [9, 10], было представлено большое количество рассекреченных работ. Л. А. Арцимович выразил свое впечатление от конференции как от «выставки идей». Вторая конференция дала старт открытому соревнованию и сотрудничеству в области синтеза.

В Японии исследования управляемого синтеза начались в начале шестидесятых в Японском исследовательском институте атомной энергии (JAERI) Министерства науки и технологий и в Институте физики плазмы Университета Нагойи Министерства образования и культуры [11].

Первая международная конференция по физике плазмы и исследованиям в области управляемого ядерного синтеза была проведена в Зальцбурге в 1961 г. при содействии МАГАТЭ. На этой конференции [12] детально обсуждались крупные проекты, такие как ZETA, Альфа, стелларатор С, Огра и DCX. Эксперименты

¹⁾ Эксперименты на токамаках в Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова ведутся с начала 1950-х годов, на ловушках семейства Огра — с 1958 г., а эксперименты на установке ZETA были начаты в 1957 г. — *Примеч. ред.*

с тета-пинчем (Scylla, Thetatron) стали более популярными, чем с линейными пинчами. Все статьи, касающиеся больших экспериментальных проектов, таких как ZETA или стелларатор С, были посвящены борьбе с различными неустойчивостями. Л. А. Арцимович сказал в заключении по поводу экспериментальных результатов: «Наше убеждение, что двери в желанную область ультравысоких температур легко откроются, так же бесосновательно, как надежда грешника попасть в рай, минуя чистилище». Была широко признана важность экспериментов, проведенных М. С. Иоффе и др. на установке ПР-2 (том. 3, с. 1045). Эти эксперименты продемонстрировали, что плазма, удерживаемая в конфигурации с минимумом B , является МГД устойчивой.

Вторая международная конференция по физике плазмы и исследованию управляемого ядерного синтеза проходила в Калэме в 1965 г. [13] Стабилизирующий эффект минимума B был подтвержден многими экспериментами. В тороидальной конфигурации нельзя получить абсолютный минимум B . Была сформулирована концепция среднего минимума B (см. [13], т. 1, с. 103, 145). Окава и др. смогли получить время удержания плазмы в тороидальной магнитной конфигурации больше бомовского (см. [13], т. 2, с. 531) и продемонстрировали эффективность среднего минимума B . Арцимович и др. представили серию экспериментов на токамаках (Т-5, т. 2, с. 577; Т-3, с. 595; Т-2, с. 629; ТМ-2, с. 647; ТМ-1, с. 659). Также были представлены результаты продолжающихся экспериментов на ZETA и стеллараторе С. Однако времена удержания плазмы в этих больших установках все еще были порядка бомовского, что требовало аккуратных исследований механизмов потерь. Интересно выглядели результаты экспериментов на тета-пинчах. Ионная температура, полученная в пинчах, составляла от нескольких сотен эВ до нескольких кэВ, и время удержания ограничивалось лишь концевыми потерями. Тем самым, одна из главных целей в экспериментах с тета-пинчами была достигнута, что послужило поворотной точкой от линейных тета-пинчей к тороидальным.

К этой конференции была подтверждена эффективность конфигураций с широм, с минимумом B и со средним минимумом B . Изучены экспериментально и поняты теоретически многие МГД неустойчивости. Постепенно становились яснее методы борьбы с МГД неустойчивостями. Была осознана важность кинетических неустойчивостей, связанных с немаксвелловостью функции распределения. Выявлен ряд неустойчивостей этого рода: конусные [14], неустойчивость Харриса [15] (1959), дрейфовые [16] (1963, 1965) и др. В эксперименте Малмберга и Уортона

(см. [13], т. 1, с. 485) было впервые подтверждено существование затухания Ландау. Л. Спитцер завершил свою речь на закрытии конференции в Калэме следующими словами: «Нами было преодолено много препятствий, на что иногда требовались годы усилий большого числа ученых. Мы можем быть уверены, что нам осталось еще преодолеть не меньше препятствий, но мы имеем все основания надеяться на то, что мы разрешим и эти проблемы объединенными усилиями ученых разных стран».

Эра Арцимовича

Третья международная конференция проходила в 1968 г. в Новосибирске. Самым знаменательным событием на этой конференции был доклад о том, что на токамаке Т-3 при электронной температуре в 1 кэВ энергетическое время удержания плазмы (несколько миллисекунд) в 30 раз превышало бомовское время (см. [17], т. 1, с. 157). В экспериментах на ZETA был найден спокойный режим разряда, который обсуждался с точки зрения МГД устойчивости плазмы в данной конфигурации магнитного поля. Это был последний доклад об успехах на ZETA и в экспериментах НВТХ с обращенным магнитным полем. Время удержания плазмы в стеллараторе С (см. [17], т. 1, с. 479, 495) при электронной температуре от нескольких десятков до сотни эВ так и осталось всего в несколько раз больше бомовского. Впрочем, это было последнее упоминание о стеллараторе С— эта машина была переделана в токамак ST еще до следующей конференции (Мэдисон, 1971). Однако некоторые аспекты стеллараторных исследований продолжали развиваться. Была тщательно сконструирована система магнитных обмоток Clasp (см. [17], т. 1, с. 465) и с использованием β -распада трития проверено удержание высокоэнергичных электронов. Эксперимент показал, что электроны совершали больше 10^7 оборотов в тороидальном направлении, так что стеллараторное поле может хорошо удерживать заряженные частицы. На WII исследовалось удержание бариевой плазмы. В случае рациональных магнитных поверхностей наблюдались резонансные потери, тогда как при иррациональных поверхностях была лишь классическая диффузия. На установке 2X (т. 2, с. 225)¹⁾ удалось удержать дейтериевую плазму при ионной температуре 6–8 кэВ и плотности $n < 5 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$ в течение $\tau = 0,2$ мс. Также появились работы по лазерной плазме.

¹⁾ 2X— пробочная ловушка с квадрупольной магнитной ямой в Ливерморской национальной лаборатории им. Лоуренса, США. — *Примеч. ред.*

На Новосибирской конференции тороидальные системы были признаны наиболее перспективными, и основным направлением исследований с тех пор стало тороидальное удержание. Закрывая конференцию, Л. А. Арцимович сказал: «Мы освободились от мрачного призрака огромных потерь, воплощенного в формуле Бома, и открыли путь для дальнейшего повышения температуры плазмы с выходом на физический термоядерный уровень».

Было видно, что, если сделанные оценки электронной температуры правильны, результаты, полученные на токамаках, могут открыть новую эпоху. Р. С. Пиз — директор Калэмской лаборатории — и Л. А. Арцимович договорились о прибытии в Курчатовский институт группы британских исследователей для измерения электронной температуры на T-3 методом лазерного рассеяния. Эти измерения подтвердили предыдущие оценки [18]. Экспериментальные результаты, полученные на T-3, оказали сильное влияние на последующую фазу исследований ядерного синтеза во всем мире. В Принстонской лаборатории физики плазмы стелларатор С был переделан в токамак ST; построены токамаки ORMAK в Окриджской Национальной лаборатории, TFR во французском Центре ядерных исследований, Фонтэне-о-Роз, Клео (Cleо) в Калэмской лаборатории, Пульсатор (Pulsator) в Институте физики плазмы Макса Планка и JFT-2 в Японском исследовательском институте атомной энергии.

Четвертая международная конференция была проведена в Мэдисоне, Висконсин, в 1971 г. [19]. Основным интересом была сфокусирована на экспериментах с токамаками. На токамаке T-4 (см. [19], т. 1, с. 443) температура электронов достигла 3 кэВ при времени удержания около 10 мс. В результате столкновений с электронами ионы нагревались приблизительно до 600 эВ. Похожие результаты были получены на установке ST (т. 1, с. 451, 465).

Переход к большим токамакам (после нефтяного кризиса)

С тех пор конференции МАГАТЭ проходили каждые два года в следующих городах: Токио, 1974 [20], Берхтесгаден, 1976, Иннсбрук, 1978, Брюссель, 1980, Балтимор, 1982, Лондон, 1984, Киото, 1986, Ницца, 1988, Вашингтон, 1990, Вюрцбург, 1992, Севилья, 1994, Монреаль, 1996, Йокогама, 1998, Сорренто, 2000...¹⁾ Оставаясь основным направлением магнитного удержания, токамаки обеспечили устойчивый прогресс в термоядерных

¹⁾ Последующие конференции МАГАТЭ: Лион (Франция, 2002), Вилламура (Португалия, 2004), Чэнду (Китай, 2006). — *Примеч. ред.*

исследованиях. Р. Пиз заявил в заключительной речи на конференции в Берхтесгадене, что «можно видеть удивительно устойчивый прогресс. Более того, в логарифмическом масштабе видно, что мы преодолели большую часть дистанции. Оставшаяся часть весьма трудна, но эти трудности конечны, и их можно суммировать, сказав, что мы просто еще не имеем адекватного понимания или контроля теплопроводности электронов поперек поля».

После токамаков первого поколения (T-4, T-6, ST, ORMAK, Alcator A, C, TFR, Pulsator, DITE, FT, JFT-2, JFT-2a, JIPP T-II, и др.) с 1975 г. начали появляться токамаки второго поколения (T-10, PLT, PDX, ISX-B, Doublet III, ASDEX, и др.). Время энергетического удержания омически нагреваемой плазмы приблизительно описывалось алкаторным скейлингом ($\tau_E \propto na^2$). На установке Alcator Авеличина $n\tau_E$ достигла $2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}\text{с}$ (1976). Эксперименты по нагреву нейтральными пучками в 1978 г. в PLT дали ионную температуру 7 кэВ. Кроме того, на установках TFR и PLT была показана эффективность нагрева с помощью ионно-циклотронного резонанса (1980). Используя пучки нейтральных частиц с энергией 3,3 МэВ, на токамаке Doublet III с вытянутым (некруглым) сечением ($\kappa = 1,4$) достигли значения $\beta = 4,6\%$ (1982).

Было осуществлено безындукционное поддержание тока в плазме. В 1980 г. на установке DITE был экспериментально проверен способ генерации тока тангенциальной инжекцией нейтральных пучков, предложенный Окавой в 1970 г. В 1978 г. Фиш предложил возбуждать ток с помощью нижнегибридных волн. Этот метод был реализован в 1980 г. на токамаках JFT-2, Versator 2, PLT, Alcator C, JIPP T-II, Wega, T-7 и др. На WT-2 и PLT в 1984 г. проведены эксперименты с током, нарастающим с нуля. На токамаке TRIAM-1M со сверхпроводящими обмотками при помощи нижнегибридных волн получен (1990) плазменный ток $I_p = 22 \text{ кА}$ ($n_e \approx 2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}$) в течение 70 мин.

На JFT-2a (DIVA) продемонстрировали (1978) подавление влияния ионов примеси дивертором. Более детально этот эффект изучался на установках ASDEX и Doublet III (1982). Тогда же установили, что при увеличении мощности нейтральной инжекции время удержания становится хуже по сравнению со случаем омического нагрева (скейлинг Кэя—Голдстона). Однако в 1982 г. на установке ASDEX в конфигурации с дивертором был найден режим улучшенного удержания (называемый H-модой), в котором время удержания увеличивалось почти в два раза по срав-

нению с обычной L-модой. H-мода исследовалась на установках Doublet III, PDX, JFT-2M и DIII-D. Таким образом, достигнут серьезный прогресс, приведший к преодолению большого числа критических для токамака трудностей.

Базируясь на этих успехах, были начаты эксперименты на токамаках третьего поколения: TFTR (Соединенные Штаты, конец 1982 г.), JET (Европейское Содружество, 1983) и JT-60 (Япония, 1985), о которых начали задумываться еще в начале 1970-х. На TFTR были достигнуты значения $n_D(0)\tau_E \sim 1,2 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}$, $\kappa T_i(0) = 44 \text{ кэВ}$ в «супершоте» (похожем на H-моду). На JET в H-моду в конфигурации с дивертором было $n_D(0)\tau_E \sim 3,2 \times 10^{19} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}$, $\kappa T_i(0) = 18,6 \text{ кэВ}$. На JT-60 при помощи нижнегибридных волн ($P_{RF} = 1,2 \text{ МВт}$) получили (1986) плазменный ток 1,7 МА (при $\bar{n}_e = 0,3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$). В 1991 г. токамак JT-60 был модернизирован в JT60U [21]. На этой установке достигнуты значения $n_D(0)\tau_E \sim 3,4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}$, $\kappa T_i(0) = 45 \text{ кэВ}$ в H-моду с высоким значением β_p . Режимы с улучшенным удержанием с отрицательным магнитным широм были получены на TFTR, DIII-D, JT60U, JET, Tore Supra [22], T-10.

В 1991 г. на JET были проведены предварительные эксперименты с тритием [23] ($n_T/(n_D + n_T) \approx 0,11$), при мощности нейтральной инжекции 15 МВт получена термоядерная мощность 1,7 МВт ($Q \sim 0,11$). В дальнейшем эксперименты с тритием проводились на TFTR (1994) [24]. На этот раз получена термоядерная мощность 9,3 МВт при 34 МВт нейтральной инжекции ($Q \sim 0,27$) и токе $I_p = 2,5 \text{ МА}$. В 1998 г. на установке JET получен в DT-реакции рекордный выход 16,1 МВт ($Q \sim 0,62$) при вложенной мощности 25,7 МВт (22,3 МВт нейтральной инжекции +3,1 МВт в ионных циклотронных волнах). Для уменьшения концентрации ионов примесей в плазме и уменьшения тепловой нагрузки на пластины дивертора на установках JET, JT60U, DIII-D, ASDEX-U и др. установлены откачиваемые диверторы. Сейчас эти большие токамаки нацелены на научную демонстрацию необходимых критических условий (переносы в плазме, устойчивый режим, дивертор, контроль примесей и т. д.) для термоядерных реакторов.

Проведенные на токамаках исследования легли в основу разработок конструкции токамака—реактора. Результатом объединенных усилий Европейского содружества, Японии, США и Российской Федерации при поддержке МАГАТЭ являются проекты INTOR — Интернационального Токамака Реактора (ИНТОР) [26] (1979–1987) — и ITER— Интернациональ-

ного Термоядерного Экспериментального Реактора (ИТЭР) [27] (1988–2001). Состояние проекта ИТЭР на 2000 г. [28] описано в разд. 16.11¹⁾.

Альтернативные подходы

Пенгом и Страйклером [29] были подмечены потенциальные теоретические преимущества сферического токамака, в котором аспектное отношение $A = R/a$ близко к единице. Предсказанные преимущества включают в себя большую вытянутость сечения плазмы ($\kappa_s \sim 2$), большое тороидальное β при таком же, как у обычного токамака, качестве удержания. Эти предположения были проверены экспериментально, в частности, на установке START [30] в Калэме ($R/a \approx 0,3/0,28 = 1,31$, $I_p \approx 0,25$ МА, $B_t \approx 0,15$ Т). Тороидальное β достигло 40%, а наблюдаемое время удержания соответствует скейлингу стандартных токамаков. Выполнены также эксперименты на сферических токамаках Глобус-М (ФТИ им. Иоффе), Pegasus (Мэдисон), TST (Токио), TS-3 (Токио). В 1999–2000 гг. начались эксперименты [31] на сферических токамаках следующего поколения MAST (Калэм) и NSTX (Принстон). Обсуждаются выгоды реактора на основе компактного токамака [32].

Довольно интенсивно развиваются системы удержания плазмы, основанные не на токамаках. Эксперименты на стеллараторах перешли от маленьких установок (Wendelstein IIb, Clasp, Uragan-1, L-1, JIPP-I, Heliotron D) к довольно большим (Wendelstein VIIA, Cleo, Uragan-2, L-2, JIPP T-II, Heliotron E). Плазма с $T_e \sim T_i$ от нескольких сотен эВ до 1 кэВ и с n_e выше, чем 10^{13} см⁻³, поддерживается только нейтральной инжекцией без омического нагрева. Кроме того, на установках WVIIA и Heliotron Епоказана возможность работы в стационарном режиме. На стеллараторах Heliotron E, CHS, ATF и WVII AS были изучены скейлинги времени удержания бестоковой плазмы. В 1998 г. начаты эксперименты на японском стеллараторе LHD (Large Helical Device) [33], и еще одна большая установка — WVII-X — в данный момент строится в г. Грайфсвальд, Германия.

Устойчивая работа пинча с обращенным полем (RFP) была обнаружена на установке ZETA в 1968 г. незадолго до ее закры-

¹⁾ Летом 2005 г. страны — участники проекта пришли к соглашению о сооружении установки ИТЭР на территории атомного центра Кадараш во Франции. Стоимость проекта — около 5 млрд долларов, начало работы установки запланировано на 2016 г. К 2006 г. к проекту присоединились Китай, Южная Корея и Индия. — *Примеч. ред.*

тия. В 1974 г. Дж. Б. Тейлор обратил внимание на то, что конфигурация RFP — это состояние с минимумом энергии при условии сохраняющейся спиральности магнитного поля (см. разд. 17.1). Эксперименты с RFP проводились на установках NBTX-1B, ETA-BETA 2, TPE-1RM, TPE-1RM15, TPE-1RM20, ZT-40M, ОНТЕ, REPUTE-1, STP-3M, MST. Полученное среднее значение $\beta \sim 10\text{--}15\%$. На ZT-40M было показано, что конфигурацию RFP можно поддерживать так называемым динамо-эффектом все время, пока есть плазменный ток (1982). Следующим шагом стали проекты RFX и TPE-RX, которые разрабатываются в настоящий момент.

Продолжались исследования на сфермаках S-1, СТХ и СТСС-1, а также конфигураций с обращенным полем (FRC) — на установках FRX, TRX, LSX, NUCSTЕ и PIACE.

Что касается открытых ловушек, то в 1976 г. на установке 2XIIВ удерживалась плазма с ионной температурой 13 кэВ и $n_{\text{TE}} \times 10^{11} \text{ см}^{-3}\cdot\text{с}$. Однако было совершенно необходимо подавить концевые потери. В 1976–1977 гг. была предложена концепция амбиполярной (тандемной) магнитной ловушки, в которой концевые потери подавляются электростатическим потенциалом. Типичными представителями амбиполярных ловушек являются установки ТМХ, ТМХ-У и ГАММА-10. Избежать концевых потерь можно также, замкнув в тор большое число пробкотронов, что было проделано на установках EBТ и NBТ.

Исследования в области инерционного удержания продвинулись далеко вперед в экспериментах по обжатию мишени световым пучком лазера на неодимовом (Nd) стекле. На установках Gekko XII (30 кДж, 1 нс, 12 лучей), Nova (100 кДж, 1 нс, 10 лучей), Omega X (4 кДж, 1 нс, 24 луча), и Octal (2 кДж, 1 нс, 8 лучей) исследуют обжатие лазерным излучением с длиной волны $\lambda = 1,06 \text{ мкм}$ и на более высоких гармониках с $\lambda = 0,53 \text{ мкм}$ и $0,35 \text{ мкм}$. Было показано, что более короткие длины волн предпочтительнее из-за лучшего поглощения и меньшего нагрева ядра мишени. В 1990 г. в экспериментах по обжатию мишени лазерным пучком была получена плазма высокой плотности (в 200–600 раз выше плотности твердого тела). Основываясь на результатах экспериментов на установке Nova, Ливерморская лаборатория создает новую установку NIF (National Ignition Facility [34, 35]) (1,8 МДж, 20 нс, 0,35 мкм, 192 луча, система лазеров на неодимовом стекле).

Устойчивый прогресс в термоядерных исследованиях является результатом международного сотрудничества и соревнования. На рис. 15.1 на плоскости $\bar{n}_e t_{\text{TE}} - T_i(0)$ показан общий прогресс

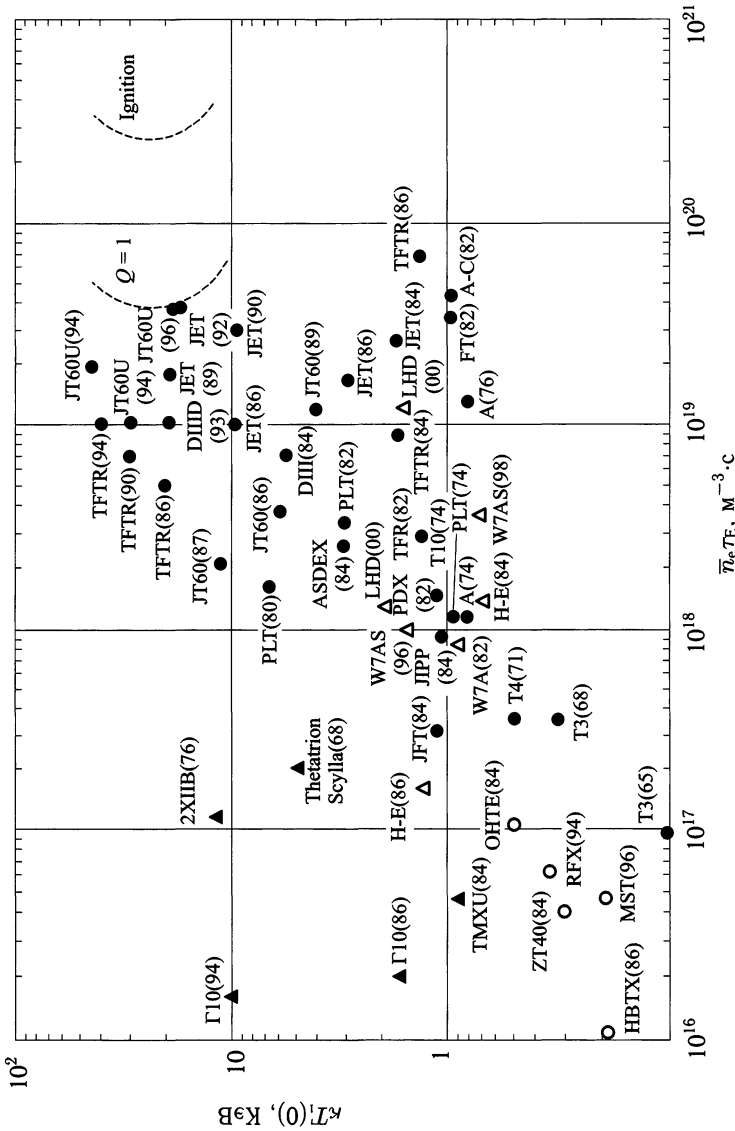


Рис. 15.1. Развитие экспериментов по удержанию (\bar{n}_e --- средняя плотность электронов, $T_e \equiv W/(P_{\text{tot}} - dW/dt - L_{\text{thr}})$ — время удержания энергии, $T_e(0)$ — температура электронов). Токамак(●), стелларатор(△), RFP(○), амбиполярная ловушка или пробкотрон, тета-пинч (темные треугольники). $Q = 1$ — критические условия. W — полная энергия плазмы; P_{tot} — полная мощность нагрева; L_{thr} — мощность радиационных потерь

в области магнитного удержания. Экспериментально на установке TFTR в DT экспериментах получено $Q \approx 0,27$, а на JET получили $Q \approx 0,62$. На JET и JT60U в экспериментах с дейтериевой плазмой добились условий зажигания, т. е. в пересчете на DT-реакцию выход энергии будет такой же, как и энергия нагрева ($Q_{\text{equiv}} = 1$).

Список литературы

1. *Bishop A.S.* Project Sherwood. — Addison Wesley, Reading Mass., 1958 (русский перевод: *Бишоп А.С.* Проект Шервуд. Программа США по управляемому термоядерному синтезу. М.: Изд. Главного управления по использованию атомной энергии при СМ СССР, 1960).
2. *Pease R.S.* Plasma Phys. and Controlled Fusion. 1986. V. 28. P. 397.
3. *Арцимович Л.А.* УФН. 1967. Т. 91. С 365.
4. *Lawson J.D.* Proc. Phys. Soc. 1957. V. 70B. P. 6 (русский перевод в кн. Управляемые термоядерные реакции. Сб. переводных материалов. Вып.26. М.: Изд. Главного управления по использованию атомной энергии при СМ СССР, 1960. С. 12).
5. *Kruskal M.D., Schwarzschild M.* Proc. Roy. Soc. 1954. V. A223. P. 348.
6. *Rosenbluth M.N., Longmire C.L.* Ann. Phys. 1957. V. 1. P. 120; *Bernstein I.B., Frieman E.A., Kruskal M.D., Kulsrud R.M.* Proc. Roy. Soc. 1958. V. A244. P. 17 (русский перевод в кн. Управляемые термоядерные реакции. Сб. переводных материалов. Вып.26. М.: Изд. Главного управления по использованию атомной энергии при СМ СССР, 1960. С. 226).
7. Nature. 1958. V. 181. No. 4604. P. 217, Jan. 25.
8. *Spitzer, Jr. L.* Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 253.
9. Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy in Geneva Sept. 1–13, 1958, V. 31, Theoretical and Experimental Aspects of Controlled Nuclear Fusion. V. 32, Controlled Fusion Devices. — Geneva: United Nations Publication, 1958. См. также: Труды Второй международной конференции по мирному использованию атомной энергии. — Женева, 1958. Доклады советских ученых. Ядерная физика / Под ред. *Алиханова А.И., Векслера В.И., Власова Н.А.* Избранные доклады иностранных ученых. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции / Под ред. *Калинина В.Ф.* М.: Изд. Главного управления по использованию атомной энергии при СМ СССР, 1959.
10. The Second Geneva Series on the Peaceful Uses of Atomic Energy (editor of the series by *Beckerley J.G.* Nuclear Fusion) N. Y.: D. Van Nostrand Co. Inc., 1960.
11. *Hayakawa S., Kimura K.* Kakuyugo Kenkyu. 1987. V. 57. P. 201, 271 (in Japanese).

12. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Salzburg, Sep. 4–9, 1961). Nucl. Fusion Suppl. 1962.
13. *ibid*: (Conference Proceedings, Culham, Sep. 6–10, 1965) International Atomic Energy Agency, Vienna, 1966.
14. *Rosenbluth M.N., Post R.F.* Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 547.
15. *Harris E.G.* Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 34.
16. *Михайловский А.Б., Рудаков Л.И.* ЖЭТФ. 1963. Т. 44. С. 912; *Krall N.A., Rosenbluth M.N.* Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 1488.
17. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Novosibirsk, Aug. 1–7, 1968). International Atomic Energy Agency, Vienna, 1969.
18. *Forrest M.J., Peacock N.J., Robinson D.C. et al.* Culham Report CLM-R 107, July, 1970.
19. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Madison, June 17–23, 1971). International Atomic Energy Agency, Vienna, 1971.
20. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Tokyo, Nov. 11–15, 1974). International Atomic Energy Agency, Vienna, 1975.
21. JT60U Team: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Seville, 1994). IAEA, Vienna. 1995. V. 1. P. 31.
22. O1-2, O1-6, O1-3, A5-5, O2-2 in 16th IAEA Fusion Energy Conference (Montreal, 1996). IAEA Vienna. 1997. V. 1.
23. JET Team: Nucl. Fusion. 1992. V. 32. P. 187.
24. TFTR Team: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Seville, 1994). IAEA, Vienna. 1995. V. 1, 11.
25. JET Team: 17th IAEA Fusion Energy Conference (Yokohama, 1998). IAEA, Vienna. 1999. V. 1, 29.
26. INTOR Team: Nucl. Fusion. 1983. V. 23. P. 1513.
27. ITER Physics Basis: Nucl. Fusion. 1999. V. 39. No. 12. P. 2137–2638.
28. ITER-FEAT: Technical Basis for the ITER-FEAT Outline Design (Dec. 1999). IAEA, Vienna.
29. *Peng Y-K.M., Strickler D.J.* Nucl. Fusion. 1986. V. 26. P. 769.
30. *Sykes A.* 17th IAEA Fusion Energy Conference (Yokohama, 1998). IAEA, Vienna. 1999. V. 1, 129.
31. MAST(OV4/1), NSTX(OV4/2) Fusion Energy Conference, Sorrento, 2000.
32. *Akers R.J. et al.* Nucl. Fusion. 2000. V. 40. P. 1223.
33. *Iiyoshi A. et al.* Nucl. Fusion. 1999. V. 39. P. 1245. (OV1/4: Fusion Energy Conference, Yokohama, 1998)
34. *Lindl J.D., Marinak M.M.* 16th IAEA Fusion Energy Conference (Montreal, 1996). IAEA, Vienna. 1997. V. 3, 43.
35. *Lindl J.D.* Inertial Confinement Fusion. — AIP Press, Springer, 1998

Глава 16

ТОКАМАК

Считается, что слово «токамак» есть аббревиатура русских слов «ток», «камера», «магнитная катушка»¹⁾. Токамаки — это осесимметричные устройства, в которых полоидальное магнитное поле, столь существенное для равновесия тороидальной плазмы, создается непосредственно током, текущим в самой плазме. Тороидальное магнитное поле, используемое для стабилизации МГД неустойчивостей, является в токамаке достаточно сильным, чтобы выполнялось условие Крускала—Шафранова. Это существенно отличает токамак от пинча с обращенным полем, в котором тороидальное поле относительно невелико. Существуют превосходные обзоры и руководства по экспериментам на токамаках [1, 2], равновесию [3] и диагностикам [4, 5].

§ 16.1. Установки токамак

На рис. 16.1, 16.2 и 16.3 в качестве типичных примеров представлены устройства больших токамаков JET, JT60U и TFTR.

На этих рисунках можно увидеть катушки тороидального поля, катушки поля равновесия (еще их называют катушками полоидального поля, они создают вертикальное поле и поле, обеспечивающее нужную форму сечения плазменного шнура), катушки омического нагрева (первичные обмотки трансформатора тока — индуктора) и вакуумную камеру. Иногда под «катушками полоидального поля» подразумеваются как катушки поля равновесия, так и катушки омического нагрева. Увеличение тока в первичных обмотках трансформатора тока (в катушках омического нагрева) индуцирует ток в плазме, работающей как вторичная обмотка. В установке JET трансформатор тока относится к типу трансформаторов с железным сердечником. В токамаках JT60U и TFTR использован тип трансформатора с воздушным сердечником. Вакуумная камера обычно делается из тонкого листа нержавеющей

¹⁾ Термин «токамак» был придуман И. Н. Головиным. — *Примеч. ред.*

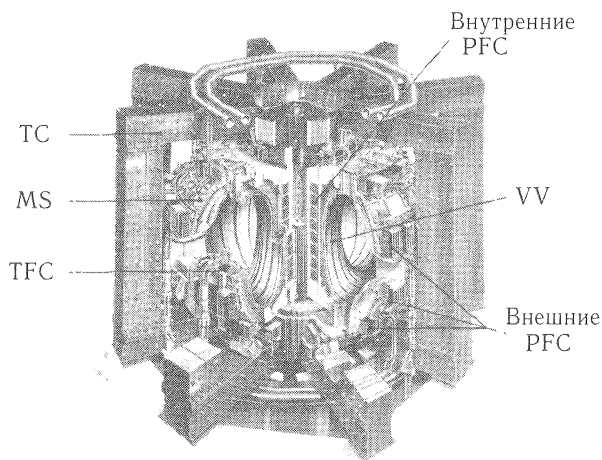


Рис. 16.1. Зарисовка художником установки JET (Joint European Torus) в г. Абингдон графства Оксфордшир, Англия. Катушки тороидального поля (TFC) располагаются вокруг вакуумной камеры (VV). Катушки внешнего полоидального поля (внешние PFC, катушки поля равновесия) и катушки внутреннего полоидального поля (внутренние PFC, катушки омического нагрева) намотаны в тороидальном направлении снаружи катушек тороидального поля (TFC). В установке JET используется трансформатор тока (TC) с железным сердечником. Катушки тороидального поля поддерживаются механическими устройствами (MS), позволяющими избежать значительного скручивания из-за поля равновесия. Напечатано с разрешения JET Joint Undertaking

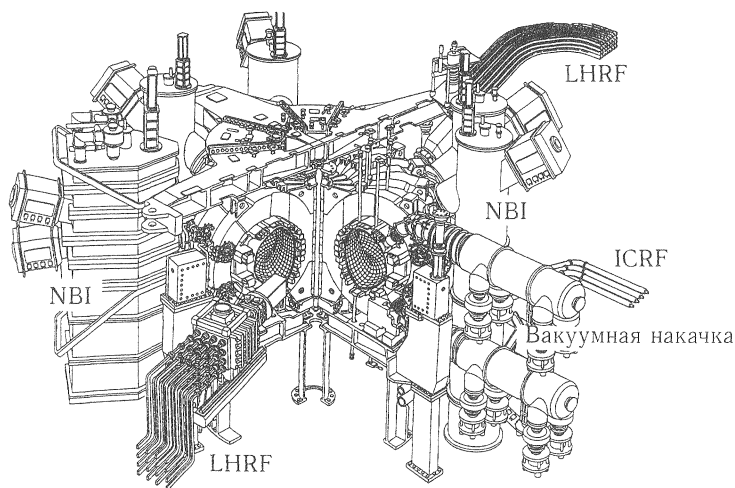


Рис. 16.2. Вид с высоты птичьего полета токамака JT60U Японского исследовательского института атомной энергии (JAERI)

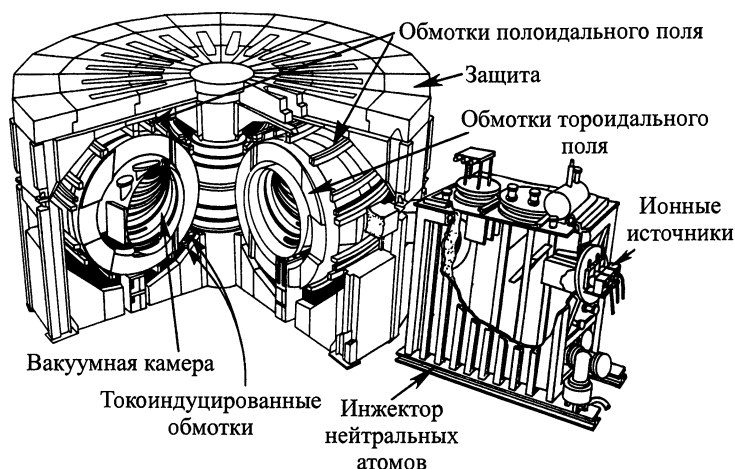


Рис. 16.3. Вид с высоты птичьего полета установки TFTR (Tokamak Fusion Test Reactor) в Лаборатории физики плазмы Принстонского университета

щей стали или жаропрочного никелевого сплава и имеет значительное электрическое сопротивление в тороидальном направлении. Таким образом, электрическое напряжение, наведенное первичными обмотками, может проникать сквозь нее. Тонкая вакуумная камера называется «лайнер». Перед началом экспериментов этот лайнер обезгаживают, нагревая его до температуры 150–400 °С и выдерживая в вакууме длительное время. Кроме

Таблица 16.1

Параметры токамаков. R , a , b в м, B_t в Т и, I_p в МА

	R	$a(\times b)$	R/a	B_t	I_p	Примечания
T-4	1,0	0,17	5,9	5,0	0,3	
T-10	1,5	0,39	3,8	5,0	0,65	
PLT	1,32	0,4	3,3	3,2	0,5	
TFTR	2,48	0,85	2,9	5,2	2,5	компактный
JET	2,96	1,25(\times 2,1)	2,4	3,45	7	некруглое сечение
JT60U	3,4	1,1(\times 1,4)	3,1	4,2	6	JT60 модерн.

того, перед проведением основного эксперимента в установке создается плазма со слабым тороидальным полем, чтобы этим разрядом почистить стенку лайнера. Внутри лайнера расположена диафрагма, сделанная из вольфрама, молибдена или графита, которая ограничивает размер плазмы и минимизирует взаимодействие этой плазмы со стенкой. Эта диафрагма называется лимити-

тером. Недавно вместо лимитера стали использовать диверторную конфигурацию. В этом случае граница плазмы определяется особой магнитной поверхностью — сепаратрисой (см. разд. 16.5). Проводящая оболочка (кожух), окружающая плазму в области вне лайнера, обеспечивает позиционное равновесие плазменного шнура и стабилизирует МГД неустойчивости на протяжении скин-ового времени. Величина вертикального поля контролируется обратной связью так, чтобы всегда держать плазменный шнур в центре лайнера. За минувшие годы в установках токамак было сделано много усовершенствований. Для улучшения поведения плазмы в токамаке и других тороидальных установках важное значение имеет точность задания магнитного поля. Параметры типичных установок токамак приведены в табл. 16.1.

Простым и полезным способом контроля за поведением плазмы являются измерения при помощи магнитных зондов. Напряжение обхода V_L и ток в плазме I_p могут быть измерены соответственно магнитным зондом и поясом Роговского [4]. Электронную температуру можно оценить по формуле Спитцера для удельного сопротивления плазмы, рассчитанного приблизительно по V_L и I_p . Согласно (6.18), полоидальное бета β_p можно записать в виде

$$\beta_p = 1 + \frac{2B_\varphi}{B_\omega^2} \langle B_{\varphi V} - B_\varphi \rangle, \quad (16.1)$$

где $|B_{\varphi V} - B_\varphi| \ll |B_\varphi|$ и $B_\omega = \mu_0 I_p / 2\pi a$. Поскольку диамагнитный поток $\delta\Phi$ равен

$$\delta\Phi = \pi a^2 \langle B_{\varphi V} - B_\varphi \rangle,$$

то

$$\beta_p = \frac{p}{B_\omega^2 / 2\mu_0} = 1 + \frac{8\pi B_\varphi}{\mu_0^2 I_p^2} \delta\Phi. \quad (16.2)$$

Таким образом, измерение диамагнитного потока $\delta\Phi$ позволяет определить β_p и давление плазмы. Положение плазмы можно определить с помощью магнитных зондов g_1 , g_2 , расположенных вокруг плазмы, как показано на рис. 16.4, а. Поскольку необходимая величина B_\perp вертикального поля равновесия связана с величиной $\Lambda = \beta_p + l_i/2 - 1$ (l_i — нормированная внутренняя индуктивность), то значение Λ можно оценить по B_\perp . Флуктуации интенсивности тормозного мягкого рентгеновского излучения следуют за флуктуациями электронной температуры. Эти флуктуации локализованы на рациональных поверхностях ($q_s(r) = 1, 2, \dots$). Модовое число и направление распространения возмущения можно оценить из показаний массива твердотель-

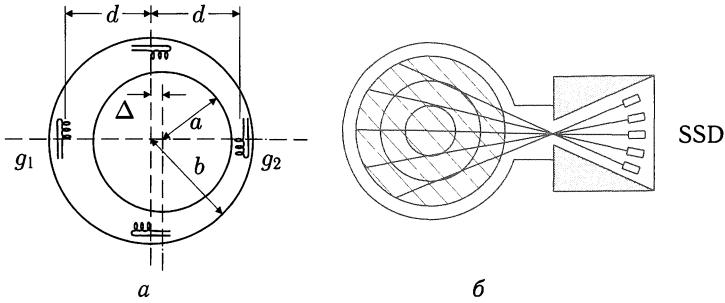


Рис. 16.4. *а* — расположение магнитных зондов вокруг плазмы (величина Δ на рисунке отрицательна); *б* — массив рентгеновских (мягкий рентген) твердотельных детекторов. Основной вклад в сигнал каждого такого детектора дает излучение из области пика температуры вдоль линии «зрения» детектора.

Флуктуации электронной температуры в этой точке могут быть измерены

ных детекторов, показанных на рис. 16.4, *б*. Когда расположение рациональных поверхностей измерено, то можно оценить и радиальный профиль тока, знание которого нужно при исследовании МГД устойчивости.

§ 16.2. Равновесие

Решение уравнения Грэда—Шафранова (6.15) для равновесия дает функцию магнитного потока (φ -компоненты векторного потенциала). Тогда магнитное поле \mathbf{B} описывается как

$$rB_r = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad rB_z = \frac{\partial\psi}{\partial r},$$

и плотность тока \mathbf{j} равна

$$\mathbf{j} = \frac{I'}{2\pi}\mathbf{B} + rp'\mathbf{e}_\varphi,$$

где ' означает $\partial/\partial\psi$. При круглом сечении плазмы для магнитной поверхности $\psi(\rho, \omega)$ вне плазмы, согласно (6.25), имеем:

$$\psi(\rho, \omega) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi} R \left(\ln \frac{8R}{\rho} - 2 \right) - \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \left(\ln \frac{\rho}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{\rho^2} \right) \right) \rho \cos \omega. \quad (16.3)$$

Граница плазмы дается условием $\rho = a$, т. е. уравнением

$$\psi(\rho, \omega) = \frac{\mu_0 I_p R}{2\pi} \left(\ln \frac{8R}{a} - 2 \right). \quad (16.4)$$

16.2а. Случай проводящего кожуха

Когда плазма окружена проводящей оболочкой (кожухом) радиуса b и магнитная поверхность совпадает с этой оболочкой, величина ψ должна быть на ней постоянной. Положение кожуха дается выражением

$$\psi(\rho, \omega) = \frac{\mu_0 I_p R}{2\pi} \left(\ln \frac{8R}{b} - 2 \right).$$

На практике положение кожуха фиксировано, и плазма занимает подходящее равновесное положение; важным моментом при этом является относительное расположение кожуха и плазмы. Если магнитная поверхность задается как

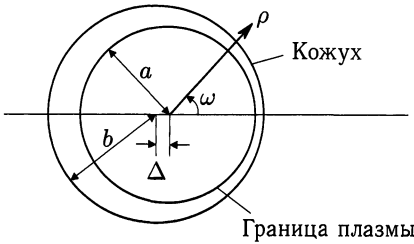


Рис. 16.5. Положения границы плазмы и кожуха

$$\psi(\rho, \omega) = \psi_0(\rho) + \psi_1 \cos \omega,$$

то она представляет собой окружность со смещенным центром; величина смещения $\Delta = -\psi_1/\psi'_0$. При этом центр плазмы смещен относительно центра кожуха на величину Δ_0 равную (см. рис. 16.5, $\rho' = \rho - \Delta \cos \omega$, $\Phi_0(\rho') = \Phi_0(\rho) - (\partial\Phi_0/\partial\rho)\Delta \cos \omega$)

$$\Delta_0(b) = -\frac{b^2}{2R} \left(\ln \frac{b}{a} + \left(\Lambda + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right).$$

($\Delta_0 < 0$ означает, что центр плазмы находится дальше от оси, чем центр кожуха.)

16.2b. Случай отсутствия кожуха

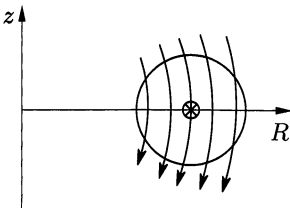


Рис. 16.6. Вертикальное поле, обеспечивающее равновесие плазмы

Если вертикальное поле \mathbf{B}_\perp однородно (постоянно в пространстве), то равновесие плазменного шнура безразлично относительно изменений положения плазмы. Когда же силовые линии вертикального магнитного поля искривлены, как показано на рис. 16.6, то положение плазмы устойчиво относительно ее смещений вверх и вниз. z -компонента F_z магнитной силы, при-

ложенной к кольцу плазмы с током, равна

$$F_z = -2\pi R I_p B_R.$$

Из соотношения $(\partial B_R / \partial z) - (\partial B_z / \partial R) = 0$ имеем:

$$M \ddot{z} = -2\pi R I_p \frac{\partial B_R}{\partial z} z = 2\pi I_p B_z \left(-\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial R} \right) z,$$

где M — масса плазмы. Поскольку $I_p B_z < 0$, условие устойчивости для показателя n спада поля есть

$$n \equiv -\frac{R}{B_z} \frac{\partial B_z}{\partial R} > 0. \quad (16.5)$$

Горизонтальная компонента F_R магнитной силы

$$M \frac{d^2(\Delta R)}{dt^2} = F_R = 2\pi R I_p (B_z - B_\perp) \Delta R.$$

Величина B_\perp , необходимая для обеспечения равновесия плазмы, равна (см. 6.28))

$$B_\perp = \frac{-\mu_0 I_p}{4\pi R} \left(\ln \frac{8R}{a} + \Lambda - \frac{1}{2} \right), \quad \Lambda = \frac{l_i}{2} + \beta_p - 1.$$

Магнитный поток внутри кольца идеально проводящей плазмы сохраняется, и

$$\frac{\partial}{\partial R} (L_p I_p) + 2\pi R B_\perp = 0.$$

Здесь собственная индуктивность $L_p = \mu_0 R (\ln(8R/a) + l_i/2 - 2)$. В результате уравнение движения в случае $\ln(8R/a) \gg 1$ имеет вид

$$M \frac{d^2(\Delta R)}{dt^2} = 2\pi I_p B_\perp \left(\frac{3}{2} - n \right) \Delta R.$$

Тогда условие устойчивости плазменного шнура относительно горизонтальных смещений

$$n < \frac{3}{2}. \quad (16.6)$$

16.2с. Предельное равновесное значение бета для токамака с вытянутым сечением

Согласно формуле (6.38), предел по полоидальному бета для круглого токамака дается выражением $\beta_p = 0,5R/a$. Предел по полоидальному бета для вытянутого токамака с горизонтальным «радиусом» a и вертикальным «радиусом» b выводится из похожих соображений. Если обход в полоидальном направлении для вытянутой плазмы обозначить $2\pi aK$ и среднее полоидальное поле при этом есть $\bar{B}_p = \mu_0 I_p / (2\pi aK)$, то отношение по-

лоидального и тороидального полей будет $\overline{B}_p/B_t = aK/(Rq_1)$, где K приближенно дается выражением $K = [(1 + (b/a)^2)/2]^{1/2}$. Таким образом, предел по бета для вытянутого токамака равен $\beta = \beta_p(aK/Rq_1)^2 = 0,5K^2a/(Rq_1^2)$, что в K^2 раз больше той же величины для круглого токамака. Чтобы сделать сечение плазмы вытянутым, необходимо иметь отрицательный показатель n спада вертикального поля, так что вытянутая плазма неустойчива относительно смещений вверх-вниз. Следовательно, чтобы поддерживать положение плазмы вертикально устойчивым, необходим контроль за изменяемым горизонтальным полем с помощью обратной связи [6].

§ 16.3. МГД устойчивость и предел по плотности

Возможная МГД неустойчивость в токамаке с низким значением бета — это винтовая (кинк) мода, которая рассматривалась в разд. 8.3. Кинк-моды могут быть стабилизированы формированием подходящего профиля тока и выбором нужного коэффициента запаса устойчивости q_a . При увеличении давления плазмы величина бета ограничивается баллонными модами (разд. 8.5). Эта неустойчивость, раскачиваемая градиентом давления, локализована в области «плохой» (неблагоприятной) кривизны магнитных силовых линий. Предел по бета для баллонных мод дается выражением $\beta_{\max} \approx 0,28(a/Rq_a)$, см. (8.124). Предел по β для винтовых и баллонных мод зависит от радиального профиля тока в плазме (от шири) и от формы сечения плазмы. Предел по среднему бета, $\beta_c = \langle p \rangle / (B^2/2\mu_0)$, рассчитанный численными МГД кодами при оптимизированных условиях, равен $\beta_c(\%) = \beta_N I_p$ (МА)/ a (м) B_t (Т), где $\beta_N = 2 - 3,5$ (см. [7, 8]). Значение β_{\max} в (8.124) согласуется с результатами численного МГД моделирования. Даже когда плазма устойчива по отношению к идеальным МГД модам, при конечном сопротивлении плазмы в ней могут возникнуть тиринг-моды. Если (см. разд. 9.1) величина Δ' положительна на рациональных поверхностях, на которых рационален коэффициент запаса устойчивости $q(r) = 1, 3/2, 2$, около этих поверхностей нарастают тиринг-моды и формируются магнитные острова, как показано на рис. 16.7. Когда профиль тока в плазме пикирован, коэффициент запаса устойчивости в центре становится $q(0) < 1$, и на рациональной поверхности $q(r) = 1$ развивается тиринг-мода с $m = 1, n = 1$, приводящая к выталкиванию наружу горячей плазмы из центральной области при перезамыкании магнитных поверхностей

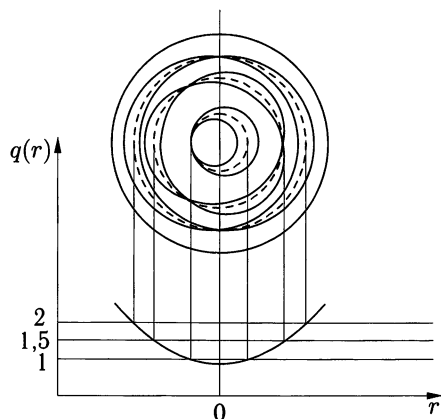


Рис. 16.7. Магнитные острова $m = 1$, $m = 3/2$, $m = 2$ появляются при $q(r) = 1, 3/2, 2$

и уплощению профиля тока (рис. 16.8). Таким путем тепловая энергия из центральной части плазмы теряется [2, 9]. Поскольку электронная температура в центре выше, чем снаружи, и сопротивление в центральной части меньше, профиль тока снова пикируется, и весь процесс повторяется снова. Подобное явление называется *внутренним, или малым срывом*.

Область устойчивого функционирования токамака с током в плазме I_p и плотностью n_e ограничена. Для нормированной плотности Гринвальда или параметра Гринвальда—Хьюгела—Мураками, определяемого как

$$N_{\text{GHM}} \equiv \frac{n_{20}}{I_p(\text{МА})/\pi a(\text{м})^2}, \quad (16.7)$$

для большинства экспериментов на токамаках справедлив эмпирический скейлинг [10]

$$N_{\text{GHM}} < 1, \quad (16.8)$$

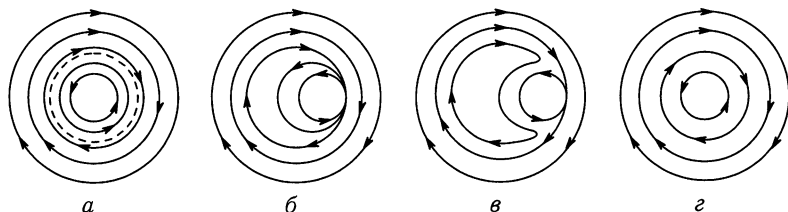


Рис. 16.8. Горячая центральная часть плазменного шнура выталкивается наружу в процессе перезамыкания магнитных поверхностей

где n_{20} — электронная плотность в единицах 10^{20} м^{-3} . $N_{\text{ГНМ}}$ выражается и иначе (см. разд. 16.4):

$$N_{\text{ГНМ}} = \frac{0,628}{K^2} \frac{n_{20}}{B_t(\text{T})/R(\text{м})} q_1. \quad (16.7')$$

Верхний предел плотности электронов существенно зависит от взаимодействия плазмы со стенкой, возрастая с увеличением мощности нагрева, хотя скейлинг $N_{\text{ГНМ}} < 1$ не отражает зависимости от мощности. При инжектировании топлива в виде водородных пеллет со стороны сильного поля на установке ASDEX-U с усовершенствованным дивертором [11] параметр $N_{\text{ГНМ}}$ становится $\sim 1,5$. Видимо, $N_{\text{ГНМ}}$ можно увеличивать и дальше. В большинстве случаев коэффициент запаса устойчивости на границе плазмы $q_a > 3$. Вне области устойчивости обычного функционирования токамака ($N_{\text{ГНМ}} < 1$, $1/q_a < 1/2 - 1/3$) возникает сильная неустойчивость, называемая *неустойчивостью срыва*. Вследствие быстрого расширения токового канала (уплощения профиля тока) на напряжении обхода появляются отрицательные всплески из-за быстрого же уменьшения внутренней индуктивности. При этом происходит резкая потеря тепловой энергии плазмы. Электронная температура быстро падает, а сопротивление плазмы возрастает. На осциллограмме напряжения обхода появляется положительный пик, и затем разряд быстро заканчивается. В некоторых случаях срыв происходит быстрее, чем предсказывается (9.27) на основе представления о развитии резистивной тиринг-моды. В качестве возможных механизмов неустойчивости срыва рассматриваются перекрытие магнитных островов $m = 2/n = 1$ ($q(r) = 2$) и $m = 3/n = 2$ ($q(r) = 1,5$) или перезамыкание магнитных островов $m = 2/n = 1$, $m = 1/n = 1$. Обзоры МГД неустойчивостей плазмы токамака и переноса плазмы даны в работах [12–15].

§ 16.4. Предел по бета для плазмы вытянутого сечения

Плотность выделения мощности реакции ядерного синтеза пропорциональна $n^2 \langle \sigma v \rangle$. Поскольку вблизи $T_i \sim 10$ кэВ величина $\langle \sigma v \rangle$ пропорциональна T_i^2 , то выходная мощность реакции синтеза пропорциональна квадрату давления плазмы $p = nkT$. Таким образом, чем выше бета, $\beta = p/(B^2/2\mu_0)$, тем экономичнее возможный реактор синтеза. В экспериментах с нейтральной инжекцией на установках ISX-B, JET-2 и PLT было получено

среднее бета $\langle \beta \rangle \sim 3\%$. Все эти токамаки имели круглое сечение плазмы. Верхний теоретический предел по среднему бета, β_c , для токамака с вытянутым сечением плазмы, связанный с развитием винтовых и баллонных неустойчивостей, равен [7, 8]

$$\beta_c(\%) \approx \beta_N I_p(\text{МА})/a(\text{М})B_t(\text{Т}). \quad (16.9)$$

Величина β_N называется фактором Тройона или нормализованным бета ($\beta_N = 2-3,5$). При использовании определений

$$\bar{B}_p \equiv \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a K}, \quad q_1 \equiv K \frac{a}{R} \frac{B_t}{\bar{B}_p}, \quad (16.10)$$

критическое бета есть

$$\beta_c(\%) = 5\beta_N K^2 \frac{a}{R q_1}, \quad (16.9')$$

где $2\pi K a$ — длина обхода границы плазмы, а K приближенно дается выражением

$$K^2 \approx (1 + \kappa_s^2)/2.$$

Здесь κ_s — отношение вертикального радиуса b к горизонтальному a . Коэффициент запаса устойчивости q_ψ на магнитной поверхности ψ равен

$$q_\psi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{B_t}{R B_p} dl = \frac{1}{2\pi d\psi} \oint B_t \frac{d\psi}{R B_p} dl = \frac{1}{2\pi d\psi} \oint B_t ds dl = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi}{d\psi},$$

где Φ — тороидальный поток через магнитную поверхность ψ . Следует заметить, что при конечном аспектном отношении величина q_1 отличается от q_ψ . Используется (в том числе для диверторной конфигурации, разд. 16.5) приближенная формула для эффективного коэффициента запаса устойчивости на границе плазмы [16]

$$q_{\text{eff}} = \frac{a^2 B}{(\mu_0/2\pi) R I} \frac{1 + \kappa_s^2}{2} \left(1 + \epsilon^2 \left(1 + \frac{\bar{\Lambda}^2}{2} \right) \right) \times \\ \times (1,24 - 0,54\kappa_s + 0,3(\kappa_s^2 + \delta^2) + 0,13\delta). \quad (16.11)$$

Здесь $\epsilon = a/R$, $\bar{\Lambda} \equiv \beta_p + l_1/2 - 1$ (см. (6.21)), а $\delta = \Delta/a$ есть треугольность плазмы (см. рис. 16.10). В некруглом токамаке DIII-D в 1990 г. было достигнуто [17] $\langle \beta \rangle = 11\%$ при $a = 0,45$ м, $B_t = 0,75$ Т, $I_p = 1,29$ МА, $I_p/aB_t = 3,1$ МА/Т, $\beta_N \approx 3,6$, $\kappa_s = 2,35$ и $R = 1,43$ м. На рис. 16.9 приводятся экспериментальные данные с DIII-D для наблюдаемого бета как функции I_p/aB_t .

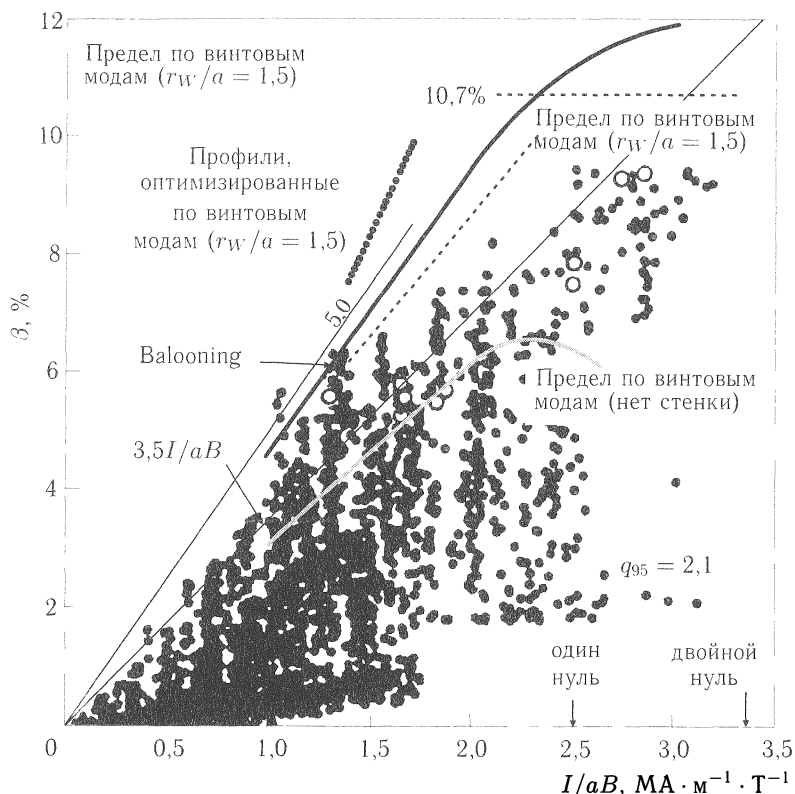


Рис. 16.9. Наблюдаемая величина бета как функция I/aB для DIII-D. Вычисления различных предельных β представлены суммарно в виде кривых при различных предположениях относительно расположения проводящей стенки (r_w/a) (согласно данным DIII-D: Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Research. 1991. V. 1. P. 69. IAEA, см. [17])

§ 16.5. Контроль за примесями, приграничный слой и дивертор

Мощность P_{brem} радиационных потерь на рентгеновское излучение вследствие столкновений электронов с ионами из единицы объема составляет

$$P_{\text{brem}} = 1,5 \cdot 10^{-38} Z_{\text{eff}} n_e^2 (\kappa T_e / e)^{1/2} \text{ (Вт/м}^3\text{)}.$$

Время потерь на рентгеновское излучение, определяемое как $\tau_{\text{brem}} = (3/2) n_e \kappa T_e / P_{\text{brem}}$, равно

$$\tau_{\text{brem}} = 0,16 \frac{1}{Z_{\text{eff}} n_{20}} \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{1/2} \text{ (с)},$$

где n_{20} измеряется в единицах 10^{20} м^{-3} , а $\kappa T_e/e$ в эВ. При $n_e \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$ и $\kappa T_e \sim 10 \text{ кэВ}$ имеем $\tau_{\text{brem}} \sim 8/Z_{\text{eff}}$ (с). Поскольку ионы примеси значительно усиливают такие радиационные потери, как рентгеновское, рекомбинационное и линейчатое излучения, при наличии примесей термоядерную плазму нельзя получить, даже если имеются только радиационные потери. С ростом температуры плазмы ионы, ударяющие в стенку вакуумной камеры, распыляют примеси. Когда распыленные примеси проникают в плазму, они сильно ионизируются и вызывают значительные радиационные потери, вследствие которых плазма охлаждается. Поэтому контроль за примесями при организации термоядерного синтеза очень важен.

Легкие примеси, такие как углерод и кислород, могут быть удалены нагревом и газоразрядной чисткой вакуумной камеры. Распыления тяжелых атомов (железа и др.) материала стенки можно избежать при использовании углеродного покрытия металлической стенки. Кроме того, очень эффективно уменьшает взаимодействие плазмы со стенкой дивертор, показанный на рис. 16.10. Внутри диверторного слоя (*Scrape-Off Layer— SOL*)¹⁾ непосредственно за сепаратрисой плазма течет со звуковой скоростью вдоль магнитных силовых линий по направлению к приемным пластинам, на которых она и нейтрализуется. При этом даже если материал нейтрализующих пластин и распылится, его атомы будут ионизованы непосредственно в диверторе вблизи этих пластин. Поскольку тепловая скорость тяжелых ионов гораздо меньше скорости потока плазмы (которая есть не что иное, как тепловая скорость ионов водорода), то маловероятно, что они потекут назад в основную плазму. Из-за радиационного охлаждения электронная температура плазмы в области дивертора становится низкой. Соответственно, вследствие выравнивания давления вдоль магнитных силовых линий, плотность в области дивертора вблизи нейтрализующих пластин становится высокой.

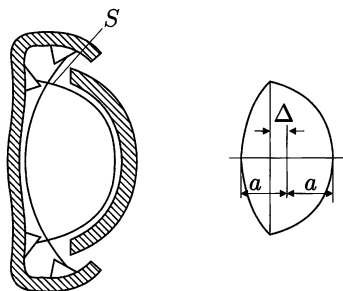


Рис. 16.10. Диверторная конфигурация с сепаратрисной магнитной поверхностью S (слева). Определение треугольности $\delta = \Delta/a$ (справа)

¹⁾ В отсутствие дивертора SOL также существует и образуется силовыми линиями, опирающимися на диафрагму (лимитер), поэтому его точнее именовать приграничным слоем. — Примеч. ред.

Столкновения уменьшают скорости ионов плазмы, падающих на пластины, что подавляет распыление. И действительно, при использовании диверторной конфигурации наблюдается уменьшение излучения примесей из основной плазмы. Однако SOL в диверторе неширок, и большая часть энергетических потерь концентрируется в узкой области на диверторной пластине. Значительные тепловые нагрузки на диверторную пластину есть один из критических моментов при проектировании реактора. Физические процессы в диверторном слое и диверторе активно исследовались экспериментально и теоретически [18].

Рассмотрим перенос тепла в диверторном слое. Предполагается, что перенос тепла вдоль магнитных силовых линий осуществляется в основном за счет классической электронной теплопроводности, а поперек магнитного поля — за счет аномальной термодиффузии. Мы используем плоскую модель, показанную на рис. 16.11, и опускаем постоянную Больцмана перед температурой. Имеем:

$$\nabla q_{\parallel} + \nabla q_{\perp} + Q_{\text{rad}} = 0, \quad (16.12)$$

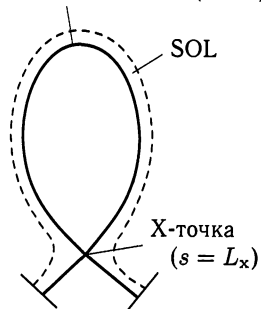
$$q_{\parallel} = -\kappa_c \frac{\partial T_e}{\partial s} = -\kappa_0 T_e^{5/2} \frac{\partial T_e}{\partial s} = -\frac{2}{7} \kappa_0 \frac{\partial T_e^{7/2}}{\partial s}, \quad (16.13)$$

$$q_{\perp} = -n \left(\chi_{\perp}^e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \chi_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) - \frac{3}{2} D (T_e + T_i) \frac{\partial n}{\partial r}, \quad (16.14)$$

$$\kappa_c \sim n \lambda_{ei}^2 \nu_{ei} = 2,8 \cdot 10^3 \text{ M}^{-1} W (\text{эВ})^{-7/2} T_e^{5/2} (\text{эВ})^{5/2}.$$

Здесь q_{\parallel} и q_{\perp} — тепловые потоки в направлениях вдоль и поперек магнитного поля, Q_{rad} — радиационные потери, κ_c — коэффициент теплопроводности, χ_{\perp}^e , χ_{\perp}^i — коэффициенты термодиффузии, а D — коэффициент диффузии частиц. Точка, где тепловой

Точка стагнации ($s = 0$)



Диверторная пластина ($s = Ld$)

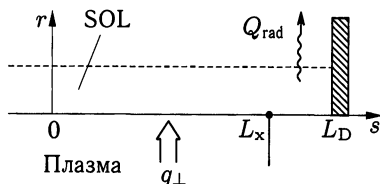


Рис. 16.11. Конфигурация диверторного слоя (SOL) и дивертора. Координаты плоской модели (справа)

поток обращается в нуль (точка стагнации), выбирается за $s = 0$, а X-точке сепаратрисы и диверторной пластине приписываются значения $s = L_X$ и $s = L_D$ соответственно. Граничные условия при $s = 0$ и $s = L_D$:

$$q_{\parallel 0} = 0, \quad (16.15)$$

$$q_{\parallel D} = \gamma T_D n_D u_D + \frac{1}{2} m_i u_D^2 n_D u_D + \xi n_D u_D = \\ = n_D M_D c_s ((\gamma + M_D^2) T_D + \xi), \quad (16.16)$$

где u_D — скорость потока плазмы на диверторной пластине, M_D — число Маха, $M_D = u_D/c_s$. $\gamma \approx 7$ — коэффициент преобразования энергии в тонком переходном слое перед пластиной, $\xi \approx (20 - 27)$ эВ — энергия ионизации. Звуковая скорость $c_s = \tilde{c}_s T_D^{1/2}$, $\tilde{c}_s = 0,98(2/A_i)^{1/2} 10^4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} \cdot (\text{эВ})^{-1/2}$, A_i — атомная масса. Первый и второй члены в (16.16) представляют собой потоки мощности на кожух, а третий член — мощность, потребляемую в процессе рециклинга. Уравнения для плотности частиц и для импульса вдоль магнитных силовых линий можно записать в виде

$$\frac{\partial(nu)}{\partial s} = S_i - S_{\text{cx},r} - \nabla_{\perp}(nu_{\perp}) \approx S_i - S_{\text{cx},r}, \quad (16.17)$$

$$mnu \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial p}{\partial s} - mu S_m, \quad (16.18)$$

где $S_m = nn_0 \langle \sigma v \rangle_m$ представляет собой потерю импульса при столкновениях с нейтралами, $S_i = nn_0 \langle \sigma v \rangle_i$ — ионизационный член, $S_{\text{cx},r} = nn_0 \langle \sigma v \rangle_{\text{cx},r}$ — потери энергии из-за перезарядки и радиационной рекомбинации. Уравнения (16.17) и (16.18) сводятся к

$$\frac{\partial(nmu^2 + p)}{\partial s} = -mu(S_m + S_{\text{cx},r}) + mu S_i. \quad (16.19)$$

Скорости потока при $s = 0$ и $s = L_D$ равны $u_0 = 0$ и $u_D = M_D c_s$, $M_D \approx 1$ соответственно. Тогда уравнения (16.12), (16.13) и граничные условия (16.15), (16.16) сводятся к

$$\frac{2\kappa_0}{7} \frac{\partial^2}{\partial s^2} T_e^{7/2} = \nabla_{\perp} q_{\perp} + Q_{\text{rad}}, \quad (16.20)$$

$$\frac{2\kappa_0}{7} (T_e^{7/2}(s) - T_{eD}^{7/2}) = \int_{L_D}^s ds' \int_0^{s'} (\nabla_{\perp} q_{\perp} + Q_{\text{rad}}) ds''. \quad (16.21)$$

Когда $\nabla_{\perp} q_{\perp} = \text{const}$, $Q_{\text{rad}} = 0$ при $0 < s < L_x$ и $\nabla_{\perp} q = 0$, $Q_{\text{rad}} = \text{const}$ при $L_x < s < L_D$, имеем

$$\frac{2\kappa_0}{7}(T_e^{7/2}(s) - T_{eD}^{7/2}) = 0,5(-\nabla_{\perp} q_{\perp})(2L_x L_D - L_x^2 - s^2) + 0,5Q_{\text{rad}}(L_D - L_x)^2 \quad (0 < s < L_x).$$

Когда радиационный член пренебрежимо мал, $T_{e0} \equiv T_e(0)$ становится равной

$$T_{e0}^{7/2} = T_{eD}^{7/2} + \frac{7}{4\kappa_0} \left(\frac{2L_D}{L_x} - 1 \right) (-\nabla_{\perp} q_{\perp}) L_x^2.$$

Если $T_{eD} < 0,5T_{e0}$ и $L_D - L_x \ll L_x$, имеем

$$T_{e0} \approx 1,17 \left(\frac{(-\nabla_{\perp} q_{\perp}) L_x^2}{\kappa_0} \right)^{2/7} = 1,17 \left(\frac{q_{\perp} L_x^2}{\kappa_0 \lambda_q} \right)^{2/7}, \quad (16.22)$$

где $1/\lambda_q \equiv -\nabla_{\perp} q_{\perp}/q_{\perp}$. Если характерные масштабы по температурному градиенту и градиенту плотности равны λ_T и λ_n соответственно и предполагается, что $(T(r) = T \exp(-r/\lambda_T))$, $(n(r) = n \exp(-r/\lambda_n))$ и $\chi_{\perp}^i \ll \chi_{\perp}^e$ и $D \sim \chi_{\perp}^e$, уравнение (16.14) принимает вид

$$q_{\perp} = n\chi_{\perp}^e \frac{T_e}{\lambda_T} \left(1 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \frac{\lambda_T}{\lambda_n} \right). \quad (16.23)$$

Таким образом, если χ^e — известная функция $\chi^e(T_e, n, B)$, то λ_T задается как $\lambda_T(T_e, n, B, q_{\perp})$.

Рассмотрим соотношения между n_0, T_{e0}, T_{B0} в точке $s = 0$ и значениями n_D, T_D на диверторной пластине $s = L_D$. Поток импульса в области дивертора уменьшается из-за столкновений с нейтралами, перезарядки и ионизации и становится меньше, чем в точке $s = 0$,

$$f_p = \frac{2(1 + M_D^2)n_D T_D}{n_s(T_{e0s} + T_{B0})} < 1. \quad (16.24)$$

Из-за радиационных потерь поток мощности на диверторную пластину уменьшается из-за радиационных потерь по сравнению с потоком мощности $q_{\perp} L_x$ в диверторный слой через сепаратрису длиной L_x ,

$$\int_0^{\infty} q_{\parallel} dr = (1 - f_{\text{rad}}) q_{\perp} L_x, \quad (16.25)$$

где f_{rad} — доля радиационных потерь. Уравнения (16.25) и (16.16) сводятся к

$$M_D n_D \tilde{c}_s T_D^{1/2} \left(\frac{(\gamma + M_D^2) T_D}{3/2 \lambda_T + 1/\lambda_n} + \frac{\xi}{1/(2\lambda_T) + 1/\lambda_n} \right) = (1 - f_{\text{rad}}) q_{\perp} L_x,$$

т. е.

$$(1 - f_{\text{rad}}) q_{\perp} L_x = \frac{\tilde{c}_s f_p \lambda_T}{1,5 + \lambda_T/\lambda_n} n_s \frac{T_{e0s} + T_{\beta 0}}{2} G(T_D), \quad (16.26)$$

$$G(T_D) \equiv \frac{M_D}{1 + M_D^2} (\gamma + M_D) T_D^{1/2} \left(1 + \frac{1}{\gamma + M_D} \frac{\xi}{T_D} \right). \quad (16.27)$$

Кривая $G(T_D)$ представлена на рис. 16.12, эта величина имеет минимум при $T_D = \xi/(\gamma + M_D^2)$. В случае $M_D \approx 1$, $\gamma \approx 7$, $\xi = 24$ эВ значение $G(T_D)$ есть

$$G_D = 4 T_D^{1/2} \left(1 + \frac{4,5}{T_D} \right).$$

В этом случае грубо $G(T_D)$ пропорционально $T_D^{1/2}$ при $T_D > 15$ эВ. Зависимость T_{e0} от n_0 очень слаба, поскольку

T_{e0} зависит от n_s лишь через $\lambda_q^{-2/7}$, как это можно видеть из (16.22). Из (16.26) и (16.24) следуют оценочные соотношения

$$T_D \propto n_0^{-2}, \quad n_D \propto n_0^3, \quad (16.28)$$

и плотность n_D в диверторе растет нелинейно с плотностью n_0 в SOL выше по течению плазмы.

Когда плотность n_0 выше по течению возрастает при сохранении постоянной левой части уравнения (16.26), решение T_D уравнения (16.26) не может существовать при плотности выше некоторого порогового значения, поскольку $G(T_D)$ имеет минимальное значение (рис. 16.12). Это связано с появлением «оторванной» (detached) плазмы, когда выше по течению превышает порог плотности [18].

Тепловая нагрузка ϕ_D на диверторную пластину перпендикулярно магнитной поверхности, дается выражением

$$\phi_D \approx \frac{(1 - f_{\text{rad}}) P_{\text{sep}}}{2\pi R 2\lambda_{\phi D}} = (1 - f_{\text{rad}}) \pi K \frac{a}{\lambda_T} q_{\perp} \left(1,5 + \frac{\lambda_T}{\lambda_n} \right) \frac{B_{\theta D}}{B_{\theta}}, \quad (16.29)$$

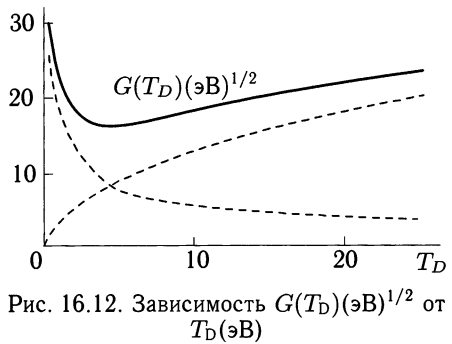


Рис. 16.12. Зависимость $G(T_D)(\text{эВ})^{1/2}$ от $T_D(\text{эВ})$

где P_{sep} — полный поток мощности через сепаратрисную поверхность, а $\lambda_{\phi D}$ — радиальная ширина потока тепла на диверторную пластину,

$$P_{\text{sep}} = 2\pi a K 2\pi R q_{\perp}, \quad \lambda_{\phi D} = \lambda_T \frac{1}{1,5 + \lambda_T/\lambda_n} \frac{B_{\theta}}{B_{\theta D}}.$$

Дробь $B_{\theta}/B_{\theta D} = 2 - 3$ — отношение плотностей магнитных поверхностей (обратных расстояний между ними) в точке стагнации ($s = 0$) и на диверторной пластине. Если диверторная пластина наклонена под углом α к магнитной поверхности, то поток тепла на такую наклоненную пластину отличается множителем $\sin \alpha$ от случая диверторной пластины, нормальной к магнитной поверхности.

§ 16.6. Скейлинг L-моды

Поток энергии ионов и электронов в плазме схематично показан на рис. 16.13. Обозначим мощность нагрева электронов в единичном объеме P_{he} , а мощность радиационных потерь и потерь на электрон-ионную релаксацию R и P_{ei} соответственно; тогда производная по времени от тепловой энергии электронов в единичном объеме дается формулой

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_e \kappa T_e \right) = P_{\text{he}} - R - P_{\text{ei}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi_e \frac{\partial \kappa T_e}{\partial r} + D_e \frac{3}{2} \kappa T_e \frac{\partial n_e}{\partial r} \right),$$

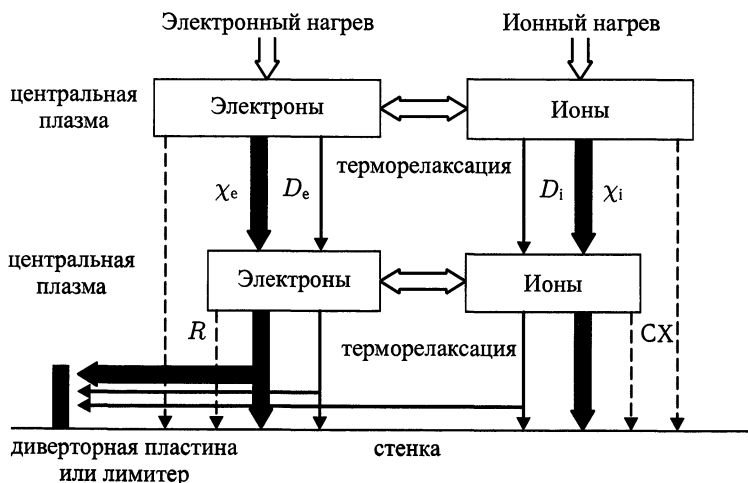


Рис. 16.13. Поток энергии ионов и электронов в плазме. Жирные стрелки — теплопроводность (χ). Тонкие стрелки — конвективные потери (D). Пунктирная стрелка — радиационные потери (R). Штрих-пунктирные стрелки — потери на перезарядку (CX)

где χ_e — теплопроводность электронов, а D_e — коэффициент диффузии электронов. Что касается ионов, то для них выводится аналогичное соотношение, только вместо радиационных потерь следует учесть потери на перезарядку, L_{ex} , при столкновениях ионов с нейтралами, так что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2} n_i \kappa T_i \right) = P_{hi} - L_{cx} + P_{ei} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(\chi_i \frac{\partial \kappa T_i}{\partial r} + D_i \frac{3}{2} \kappa T_i \frac{\partial n_i}{\partial r} \right).$$

Результаты экспериментов по омическому нагреву и по нагреву инъекцией пучка нейтральных атомов можно объяснить классическими процессами. Теоретический анализ позволяет оценить довольно аккуратно эффективность волнового нагрева. Радиационные потери и потери на перезарядку являются классическими процессами. Чтобы установить баланс энергии в плазме экспериментально, необходимо измерить такие фундаментальные величины, как $n_e(r, t)$, $T_i(r, t)$, $T_e(r, t)$, а также другие [4]. Согласно многим экспериментальным результатам, релаксация энергии между ионами и электронами является классической, и наблюдаемая ионная теплопроводность в некоторых случаях в 2–3 раза выше неоклассической

$$\chi_{i,nc} = n_i f(q, \varepsilon) q^2 (\rho \Omega_i)^2 \nu_{ii}$$

($f = 1$ в режиме Пфирша—Шлютера и $f = \epsilon_t^{-3/2}$ в банановом режиме), а в некоторых случаях наблюдаемая ионная теплопроводность аномальна. Теплопроводность электронов, оцениваемая на основе экспериментальных результатов, всегда аномальна и гораздо выше неоклассической (более чем на порядок). В большинстве случаев время удержания энергии в плазме определяется в основном потерями за счет теплопроводности электронов. Время удержания энергии τ_E в стационарном состоянии определяется как

$$\tau_E \equiv \frac{\int (3/2)(n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i) dV}{P_{in}}.$$

Время удержания энергии τ_{OH} в плазме с омическим нагревом хорошо описывается алкаторным (неоалкаторным) скейлингом ¹⁾

¹⁾ Алкаторный и неоалкаторный скейлинг слегка различны. Приведенная формула функционально отражает неоалкаторный скейлинг, а числовой коэффициент взят из алкаторного. Перечень скейлингов омического режима см. в монографии *Захаров Л. Е., Путвинский С. В.* Итоги науки и техники. Физика плазмы. Т. 7. С. 23. — М.: ВИНТИ, 1985. — *Примеч. ред.*

(время измеряется в секундах, радиус — в метрах, концентрация — в $[10^{20} \text{ м}^{-3}]$):

$$\tau_{\text{OH}}(c) = 0,103q^{0,5}\bar{n}_{e20}a^{1,04}R^{2,04}.$$

Однако линейная зависимость τ_{OH} от средней плотности электронов \bar{n}_e нарушается в области высоких плотностей $n_e > 2,5 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}$, и τ_{OH} стремится к насыщению. Когда плазма нагревается инжекцией высокоэнергичных нейтралов или при помощи волнового нагрева, то с ростом мощности нагрева время удержания энергии уменьшается (деградация удержания). Кэй и Голдстоун проанализировали многие экспериментальные результаты по инжекционному нагреву плазмы и получили так называемый скейлинг Кэя—Голдстоуна для времени удержания энергии [19], а именно,

$$\tau_E = (1/\tau_{\text{OH}}^2 + 1/\tau_{\text{AUX}}^2)^{-1/2},$$

$$\tau_{\text{AUX}}(c) = 0,037\kappa_s^{0,5}I_p P_{\text{tot}}^{-0,5}a^{-0,37}R^{1,75},$$

где используются единицы МА, МВт и м, вытянутость обозначена через κ_s , а P_{tot} — суммарная мощность нагрева в МВт¹⁾.

Группа ITER собрала данные по недавним экспериментам. Анализ экспериментальной базы данных по удержанию в L-модe (см. следующий раздел) приводит к скейлингу ITER-P[20]

$$\tau_E^{\text{ITER-P}}(c) = 0,048I_p^{0,85}R^{1,2}a^{0,3}\bar{n}_{20}^{0,1}B^{0,2}(A_i\kappa_s/P)^{1/2}, \quad (16.31)$$

где используются единицы МА, м, Т, МВт, средняя плотность \bar{n}_{20} измеряется в 10^{20} м^{-3} . P — мощность нагрева с поправкой на излучение P_R ($P = P_{\text{tot}} - P_R$). Сравнение скейлинга $\tau_E^{\text{ITER-P}}$ с данными экспериментов по L-модe представлено на рис. 16.14. В термоядерной плазме с идущей реакцией синтеза при $T \sim 10$ кэВ мощность нагрева грубо равна мощности, выделяемой с α -частицами, $P_\alpha \approx 0,04n_{\text{DT}20}^2T^2A\alpha^3\kappa_s$ (МВт, 10^{20} м^{-3} , кэВ, м) (см. разд. 16.11). Интересно отметить, что для скейлингов Голдстоуна и удержания в L-модe величина $n_{\text{DT}}T\tau_E$ зависит лишь от произведения $A I_p$.

¹⁾ Здесь тоже нет единства в названиях. Индекс AUX относится к установке ASDEX, но скейлингом ASDEX обычно называют другое выражение. Приведенная формула для τ_{AUX} иногда именуется скейлингом Голдстоуна, тогда как скейлинг Кэя—Голдстоуна устроен более сложно. Подробно о скейлингах, математических и физических принципах, лежащих в их основе, их перечень и интерпретацию — см. монографию *Есипчук Ю.В., Юшманов П.Н. Итоги науки и техники. Физика плазмы. Т. 10. Ч. 2.* — М.: ВИНТИ, 1991. — *Примеч. ред.*

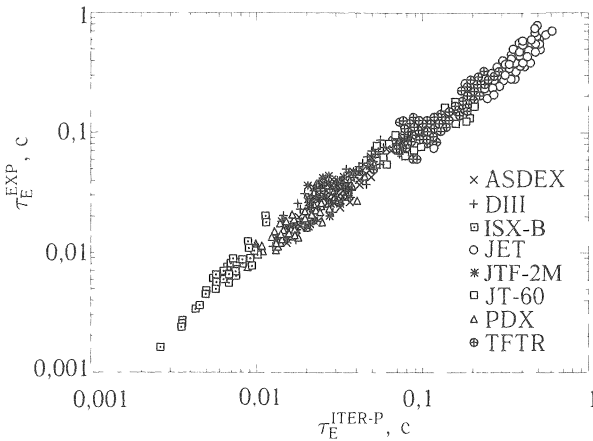


Рис. 16.14. Сравнение скейлинга удержания $\tau_E^{\text{ITER-P}}$ с экспериментальными данными по времени удержания τ_E^{EXP} в L-моду (по Yushmanov et al. Nucl. Fusion. 1990. V. 30. P. 1999 [20])

§ 16.7. *H*-мода и режимы с улучшенным удержанием.

Состояние с улучшенным удержанием — *H*-мода — было обнаружено в экспериментах на ASDEX [21, 22] в диверторной конфигурации. Когда мощность инжекционного нагрева превышает пороговую величину, интенсивность линии дейтерия D_α на границе дейтериевой плазмы неожиданно и резко убывает (масштаб времени — 100 мкс), убывает и рециклинг атомов дейтерия вблизи границы плазмы. Одновременно регистрируется значительное изменение радиального электрического поля E_r на периферии плазмы (оно изменяется в отрицательную сторону). Кроме того, увеличиваются плотность электронов и плотность тепловой энергии, и примерно в 2 раза увеличивается время удержания энергии в плазме. *H*-мода наблюдалась в установках PDX, JFT-2, DIII-D, JET, JT60U и других. Удержание, описываемое скейлингом Кэя—Голдстона, называется *L*-модой. В *H*-моду градиенты температуры и плотности электронов непосредственно перед границей плазмы, определяемой сепаратрисой, становятся большими. В спонтанной *H*-моду поле E_r , будучи отрицательным (направленным вовнутрь), увеличивается по модулю — см. рис. 16.15 [23, 24]. В работах [25, 26] указывалось, что причиной изменения радиального электрического поля при L-H переходах могут быть потери ионов, орбиты которых вблизи границы плазмы конечны. Радиальное электрическое поле вызывает вращение плазмы в полоидальном направлении со скоростью $v_\theta = -E_r/B$

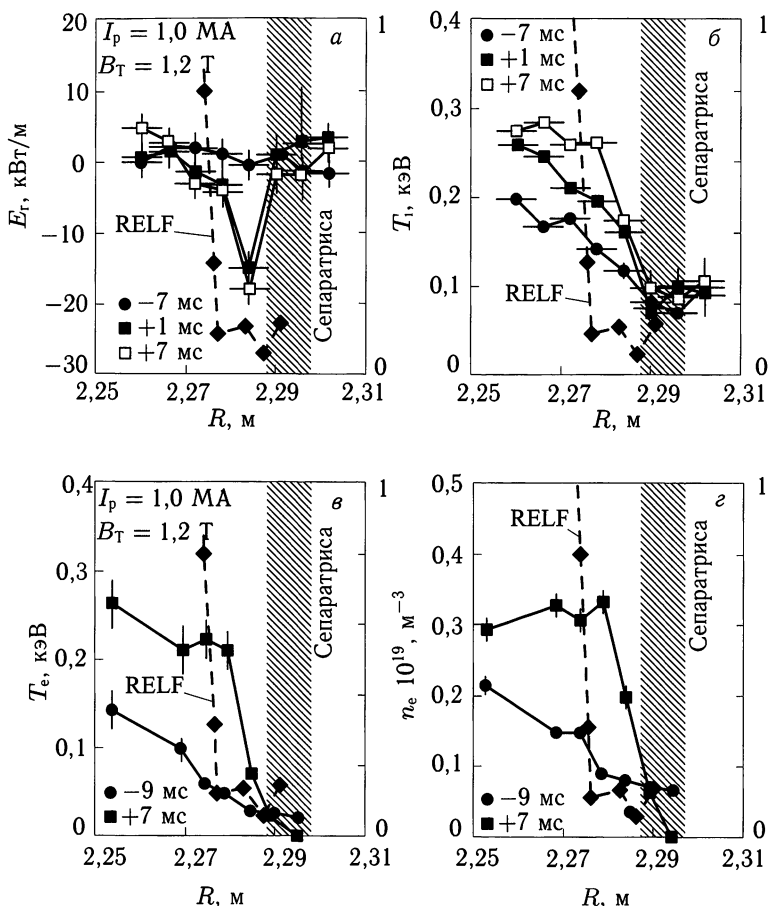


Рис. 16.15. Графики различных профилей приграничной плазмы в процессе L-H перехода на DIII-D: а — профиль E_r ; б — профили ионной температуры, измеренные с помощью рекомбинационной спектроскопии при перезарядке CVII; в, г — профили электронной температуры и плотности, измеренные по томсоновскому рассеянию (по Doyle *et al.* Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Research. 1991. V. 1. P. 235. IAEA [24])

и в тороидальном со скоростью $v_\phi = -(E_r/B)(B_\theta/B)$. Если существует градиент E_r , то генерируются сдвиговые вращения в полоидальном и тороидальном направлениях. На важность сдвигового течения для подавления периферийной турбулентности и улучшения удержания указывалось в работе [27].

Рассмотрим следующую гидродинамическую модель:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 + \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \nabla + L_d \right) \tilde{\xi} = \tilde{s},$$

где $\tilde{\xi}$ — поле возмущений. Считается, что \mathbf{v}_0 — равновесное $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ течение, \tilde{s} представляет собой источник накачки турбулентности, а L_d — оператор, ответственный за диссипацию турбулентности. Совместная корреляционная функция $\langle \tilde{\xi}(1)\tilde{\xi}(2) \rangle$ поля возмущений $\tilde{\xi}(1)$ в точке 1 и $\tilde{\xi}(2)$ в точке 2 описывается уравнением [28]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (v'_\theta - v_\theta/r_+)r_+ \frac{\partial}{\partial y_-} - \frac{\partial}{\partial r_+} D(r_+, y_-) \frac{\partial}{\partial r_+} + L_d \right) \langle \tilde{\xi}(1)\tilde{\xi}(2) \rangle = T, \quad (16.32)$$

где D — коэффициент радиальной диффузии турбулентности, T — член накачки, $r_+ = (r_1 + r_2)/2$, $\theta_- = \theta_1 - \theta_2$, $y_- = r_+\theta_-$. Время декорреляции τ_d в полоидальном направлении — это время, за которое относительное смещение точек 1 и 2 в сдвиговом течении сравняется с пространственной длиной корреляции турбулентности, k_{0k}^{-1} , т. е.

$$k_{0k}\delta y \sim 1,$$

$$\delta y = v'_\theta(\Delta r)\tau_d,$$

$$\tau_d = \frac{1}{v'_\theta \Delta r k_{0k}}.$$

Темп декорреляции ω_s в полоидальном направлении составляет

$$\omega_s = \frac{1}{\tau_d} = (\Delta r k_{0k})v'_\theta.$$

Если Δr — длина корреляции турбулентности в радиальном направлении, то скорость (темп) радиальной декорреляции $\Delta\omega_t$ дается выражением

$$\Delta\omega_t = \frac{D}{(\Delta r)^2}.$$

Поскольку существует сильное взаимодействие радиального и полоидального декорреляционных процессов, суммарный темп декорреляции $1/\tau_{\text{corr}}$ есть комбинация этих двух скоростей, т. е.

$$\frac{1}{\tau_{\text{corr}}} = (\omega_s^2 \Delta\omega_t)^{1/3} = \left(\frac{\omega_s}{\Delta\omega_t} \right)^{2/3} \Delta\omega_t. \quad (16.33)$$

Темп декорреляции $1/\tau_{\text{corr}}$ в $(\omega_s/\Delta\omega_t)^{2/3}$ раз выше, чем $\Delta\omega_t$; $\Delta\omega_t$ представляет собой темп декорреляции турбулентности в случае

отсутствия шири (сдвига) у потока. Поскольку уровень насыщения флуктуаций ξ оценивается как

$$|\tilde{\xi}|^2 \sim T \times \tau_{\text{согг}},$$

то для него получается

$$\frac{|\tilde{\xi}|^2}{|\tilde{\xi}_0|^2} \sim \left(\frac{\Delta\omega_t}{\omega_s}\right)^{2/3} \sim \left(\frac{1}{(dv_\theta/dr)t_0}\right)^{2/3} \frac{1}{(k_{0y}\Delta r)^2},$$

$$t_0^{-1} \equiv \langle k_{0y}^2 \rangle D,$$

где $|\tilde{\xi}_0|$ соответствует случаю бесширового течения. Влияние сдвигового течения на уровень насыщения резистивной турбулентности, накачиваемой градиентом давления, показано на рис. 16.16. Из этого рисунка очевидна связь между полоидальной и радиальной декорреляциями сдвиговых флуктуаций. Поскольку коэффициент термодиффузии пропорционален $|\tilde{\xi}|^2$, то он уменьшается на периферии плазмы, и там формируется тепловой барьер.

Физика Н-моды интенсивно изучается теоретически.

Наряду со стандартной Н-модой, обнаруженной на ASDEX и других установках, также наблюдаются и другие типы мод с улучшенным удержанием. Так, в экспериментах на TFTR [29] проводилось обезгаживание первой стенки (удаление дейтерия) перед опытами с углеродным лимитером, расположенным на внутренней стороне (в области сильного поля) вакуумного тора. Затем включалась сбалансированная ко-инжекция (пучок направлен вдоль тока в плазме) или контр-инжекция (направление пучка противоположно току) пучка нейтральных атомов в дейтериевую плазму, и наблюдался «супершот» с улучшенным удержанием. В «супершоте» профиль плотности электронов сильно пикирован ($n_e(0)/\langle n_e \rangle = 2,5-3$).

На DIII-D наблюдалась VH мода [30], в которой область сильного электрического поля расширялась от периферии в направлении центра плазмы ($r/a \sim 0,6$), и при этом $\tau_E/\tau_E^{\text{ITER-P}}$ было 3,6. В опытах на JT60U наблюдалась Н-мода [31] с высоким полоидальным бета, $\beta_p = 1,2 - 1,6$, и профиль плотности был пикирован ($n_e(0)/\langle n_e \rangle = 2,1 - 2,4$). Кроме того, формировался краевой тепловой барьер, присущий Н-моды.

Хинтон и др. [32] указали на то, что пикирование профилей давления и плотности приводит к увеличению градиента радиального электрического поля. Из радиальной компоненты

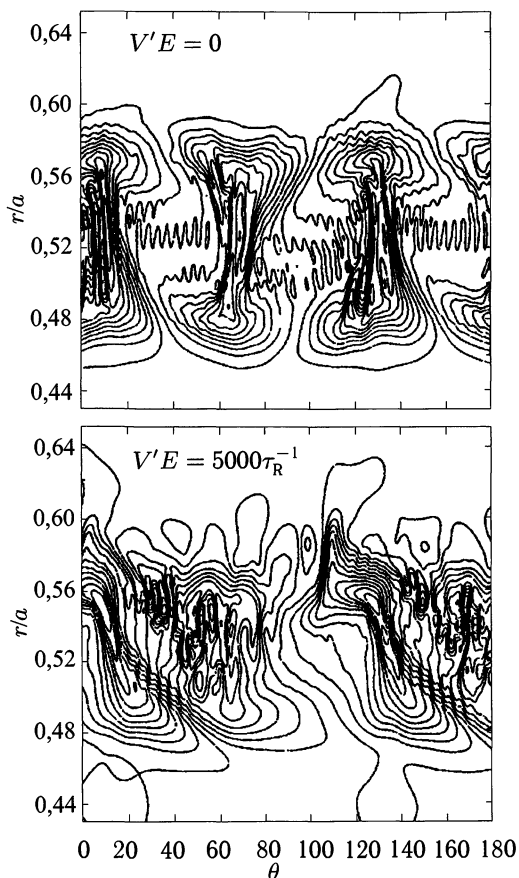


Рис. 16.16. Мгновенное изображение контуров равной плотности для беширового (вверху) и сильно-сдвигового (внизу) потоков (по *Bigrali et al.* Plasma Phys. Controlled Nucl. Fusion Reseach. 1991. V. 2. P. 191. IAEA) [27].

уравнения движения (5.7) для ионной компоненты или из (5.28) имеем

$$E_r \approx B_p u_t - B_t u_p + \frac{1}{en_i} \frac{dp_i}{dr}. \quad (16.34)$$

Дифференцирование E_r по r дает

$$\frac{dE_r}{dr} \sim -\frac{1}{en_i^2} \frac{dn_i}{dr} \frac{dp_i}{dr},$$

поскольку в типичных условиях экспериментально наблюдаемой H-моды вклад прочих членов мал.

Недавно мода с хорошим удержанием в конфигурации с отрицательным магнитным широм демонстрировалась на DIII-D,

TFTR, JT60U, JET и Tore Supra [33]. Как было показано в разд. 8.5, в области отрицательного шира,

$$S = \frac{r}{q} \frac{dq}{dr} < 0, \quad (16.35)$$

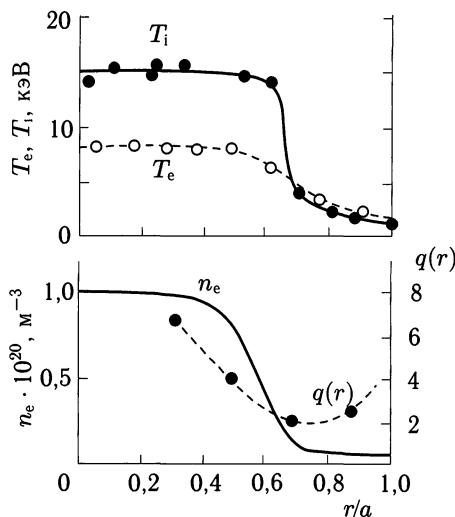


Рис. 16.17. Радиальные профили температур ионов и электронов, а также профили плотности и q в конфигурации с отрицательным магнитным широм в установке JT60U

баллонная мода устойчива. Пример радиальных профилей температуры, плотности и q на установке JT60U представлен на рис. 16.17. За счет комбинирования центрального нагрева и отрицательного магнитного шира, возле точки минимума q появляются большие градиенты температуры и плотности. Этот внутренний транспортный барьер формируется вследствие эффектов отрицательного магнитного шира¹⁾ и шира скорости электрического дрейфа плазмы ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$).

Мерой хорошей реализации моды с улучшенным удержанием служит отношение H_L наблюдаемого времени удержания энергии τ_E^{EXP} к скейлингу $\tau_E^{\text{ITER-P}}$

$$H_L \equiv \frac{\tau_E^{\text{EXP}}}{\tau_E^{\text{ITER-P}}}. \quad (16.36)$$

Наблюдаемое значение фактора H_L находится в диапазоне 2–3.

Итеровская рабочая группа по базе данных для H-моды собрала данные экспериментов на установках ASDEX, ASDEX-U, DIII-D, JET, JFT-2M, PDX, PBX и Alcator C-Mod и т. д. Результаты анализа H-моды в этих экспериментах приводят к следующему

¹⁾ Режимы с внутренними транспортными барьерами получены экспериментально и при стандартном положительном шире. Как правило, барьер локализован вблизи рациональной поверхности с низкими m , n ; исчерпывающей теории явления до настоящего времени нет. — *Примеч. ред.*

щему выражению для времени удержания энергии [34]:

$$\tau_{E, \text{th}}^{\text{IPV89y2}} = 0,0562 I_p^{0,98} B_i^{0,15} P^{-0,69} M_i^{0,19} R^{1,97} \bar{n}_{e19}^{0,41} \epsilon^{0,58} \kappa^{0,78}, \quad (16.37)$$

где используются единицы: с, МА, Т, МВт, атомная единица массы, м, 10^{19} м^{-3} , а полная мощность нагрева скорректирована с учетом инжекционного нагрева, орбитальных потерь и потерь на перезарядку, что уменьшает временную производную запасенной энергии. Этот скейлинг используется при существовании колебаний, локализованных на краю плазмы (ELM). Скейлинг для пороговой мощности нагрева P_{LN} , определяющий границу окна оперирования (работы) с H-модой:

$$P_{\text{LN}} = 2,84 M_i^{-1} B_i^{0,82} \bar{n}_{e20}^{0,58} R^{1,00} a^{0,81}. \quad (16.38)$$

В большинстве экспериментов с горячей плазмой для нагрева этой плазмы используется инжекция пучка нейтральных атомов. В комбинации с модой с улучшенным удержанием, например, с H-модой, в супершоте или с модой с высоким β_p в больших токамаках, инжекция нейтралов дает плазму с термоядерными температурами. Параметры плазмы для типичных разрядов в установках JET [35], JT60U [31] и TFTR [29] представлены в табл. 16.2.

В современных источниках пучков нейтральных атомов положительные ионы водорода ускоряются и затем проходят через ячейку, заполненную нейтральным газом, где ионы превращаются в пучок быстрых нейтралов в процессе перезарядки (присоединение электрона). Однако доля положительных ионов водорода, превращаемых в нейтральные атомы, становится маленькой, когда энергия иона больше 100 кэВ (2,5% при 200 кэВ). С другой стороны, доля отрицательных ионов водорода (H^-), превращаемых в нейтральные атомы (обдирание электронов), в диапазоне высоких энергий не уменьшается (составляет $\approx 60\%$); разрабатывается высокоэффективный инжектор пучка нейтралов с *источником отрицательных ионов*.

Волновой нагрев, описанный в гл. 12, представляет собой другой способ нагрева плазмы. На установке RLТ наблюдалась сравнимая эффективность волнового ВЧ-нагрева в диапазоне ионной циклотронной частоты и инжекционного нагрева. В экспериментах по такому ионному циклотронному нагреву (ИЦН) на JET были достигнуты параметры $\kappa T_i(0) = 5,4$ кэВ, $\kappa T_e(0) = 5,6$ кэВ, $n_e(0) = 3,7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $\tau_E \approx 0,3$ с при $P_{\text{ICRF}} = 7$ МВт.

Таблица 16.2

Параметры плазмы в больших токамаках JET [35], JT60U [31] и TFTR [29]. Здесь $n_i(0)\tau_E^{\text{tot}}T_i(0)$ — тройное произведение для термоядерной плазмы, κ_s — отношение вертикального радиуса к горизонтальному. q — эффективные коэффициенты запаса устойчивости вблизи границы плазмы для различных определений: q_{95} — коэффициент запаса устойчивости на магнитной поверхности, соответствующей 95% потока, q_{eff} и q^* определяются в (16.11) и работе [29] соответственно, q_l определяется в разд. 16.4. E_{NB} — энергия частиц при инжекции нейтронов

	JET	JT60U	TFTR
	без ELM No.26087	с ELM No.E21140	«супершот»
I_p (МА)	3,1	2,2	2,5
B_t (Т)	2,8	4,4	5,1
R/a (м/м)	3,15/1,05	3,05/0,72	$\approx 2,48/0,82$
κ_s	1,6	1,7	1
q	$q_{95}=3,8$	$q_{\text{eff}}=4,6$	$q^*=3,2$
q_l	2,8	3,0	2,8
$n_e(0)(10^{19}\text{м}^{-3})$	5,1	7,5	8,5
$n_e(0)/\langle n_e \rangle$	1,45	2,4	—
$n_i(0)(10^{19}\text{м}^{-3})$	4,1	5,5	6,3
$T_e(0)$ (кэВ)	10,5	10	11,5
$T_e(0)/\langle T_e \rangle$	1,87	—	—
T_i (кэВ)	18,6	30	44
W_{dia} (МДж)	11,6	7,5	6,5
dW_{dia}/dt (МДж/с)	6,0	—	7,5
Z_{eff}	1,8	2,2	2,2
β_p	0,83	1,2	$\approx 1,1$
β_t (%)	2,2	$\approx 1,3$	$\approx 1,2$
g (фактор Тройона)	2,1	$\approx 1,9$	2
P_{NB} (МВт)	14,9	24,8	33,7
E_{NB} (кэВ)	135, 78	95	110
$\tau_E^{\text{tot}} = W/P_{\text{tot}}$ (с)	0,78	0,3	0,2
$H = \tau_E^{\text{tot}}/\tau_E^{\text{ITER-P}}$	$\approx 3,0$	$\approx 2,1$	$\approx 2,0$
$n_i(0)\tau_E^{\text{tot}}T_i(0)(10^{20}\text{кэВм}^{-3}\text{с})$	5,9	5	5,5
$n_T(0)/(n_T(0) + n_D(0))$	0	0	0,5
P_{fusion} (МВт)	—	—	9,3

§ 16.8. Неиндукционное возбуждение тока

До тех пор, пока в установке токамак ток в плазме возбуждается электромагнитной индукцией в трансформаторе тока, разряд с неизбежностью будет импульсным с конечной протяженностью во времени. Если же ток в плазме поддерживать неиндукционным способом, то, в принципе, возможен и непрерывно работающий (стационарный) токамак—реактор. Возбуждение тока инжекцией нейтралов было предложено в работе [36], а с помощью волн — Окавой и Уортом [37]. Импульс инжектируемых частиц или волн преобразуется в импульс заряженных частиц, и результирующий направленный поток заряженных частиц создает электрический ток. Возбуждение тока с помощью инжекции нейтралов было продемонстрировано на DITE, TFTR и других установках. Генерация тока волнами в диапазоне нижегибридной частоты [38] была осуществлена на установках JFT-2, JIPPT-II, WT-2, PLT, Alcator C, Versator 2, T-7, Wega, JT-60 и др. Возбуждение тока электронными циклотронными волнами [40] наблюдалось на Cleo, T-10, WT-3, Compass-D, DIII-D, TCV и других установках.

16.8а. Возбуждение тока нижегибридными волнами

Теория возбуждения тока волнами изложена здесь по работам [38]. При распространении волны вдоль магнитной силовой линии функция распределения частиц плазмы по скоростям уплощается вблизи фазовой скорости волны из-за диффузии в пространстве скоростей. Введем для коэффициента диффузии в пространстве скоростей вследствие действия волны обозначение D_{rf} ; тогда уравнение Фоккера—Планка (см. [39])

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \left(\frac{\mathbf{F}}{m}\right) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \frac{\partial}{\partial v_z} \left(D_{rf} \frac{\partial f}{\partial v_z}\right) + \left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{F.P.}}, \quad (16.39)$$

где $(\delta f / \delta t)_{\text{F.P.}}$ — фоккер—планковский столкновительный член

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{F.P.}} = - \sum_{i,e} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 J_v) + \frac{1}{v \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta J_\theta)\right), \quad (16.40)$$

$$J_v = -D_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial v} + A f, \quad J_\theta = -D_{\perp} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (16.41)$$

Здесь (v, θ, ψ) — сферические координаты в пространстве скоростей. Когда скорость пробной частицы больше тепловой скорости

частиц плазмы ($v > v_T^*$), тензор диффузии в пространстве скоростей D_{\parallel}, D_{\perp} и коэффициент динамического трения A сводятся к

$$D_{\parallel} = \frac{v_T^{*2} \nu_0}{2} \left(\frac{v_T^*}{v} \right)^3, \quad D_{\perp} = \frac{v_T^{*2} \nu_0}{2} \frac{v_T^*}{2v},$$

$$A = -D_{\parallel} \frac{m}{m^*} \frac{v}{v_T^{*2}},$$

где

$$v_T^{*2} = \frac{T^*}{m^*}, \quad \nu_0 = \left(\frac{qq^*}{\epsilon_0} \right)^2 \frac{n^* \ln \Lambda}{2\pi v_T^{*3} m^2} = \Pi^{*4} \frac{\ln \Lambda}{2\pi v_T^{*3} n^*}$$

и $\Pi^{*2} \equiv qq^* n^* / (\epsilon_0 m)$. Здесь v_T^* , n^* — тепловая скорость и плотность полевых частиц, q^* — заряд такой частицы, а q — заряд пробной частицы. Рассмотрим электронную функцию распределения в пространственно-однородном случае в отсутствие внешней силы ($\mathbf{F} = 0$). При этом учитываются электрон-электронные и электрон-ионные столкновения (заряд иона Z). Вводя безразмерные величины $\tau = \nu_{Te} t$, $u = v/v_{Te}^*$, $w = v_z/v_{Te}^*$, $D(w) = D_{\text{rf}}/v_{Te}^{*2} \nu_{Te}$, запишем уравнение Фоккера—Планка как

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial w} \left(D(w) \frac{\partial f}{\partial w} \right) + \frac{1}{2u^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u} + f \right) + \frac{1+Z}{4u^3} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right).$$

При использовании в пространстве скоростей декартовых координат $(v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$ вместо сферических, поток в фоккер—планковском столкновительном члене имеет вид (предполагается, что $v > v_T^*$)

$$J_i = A_i f - \sum_j D_{ij} \frac{\partial f}{\partial v_j}, \quad (16.42)$$

$$A_i = -D_0 v_T^* \frac{m}{m^*} \frac{v_i}{v^3}, \quad (16.43)$$

$$D_{ij} = \frac{D_0}{2} \frac{v_T^*}{v^3} \left((v^2 \delta_{ij} - v_i v_j) + \frac{v_T^{*2}}{v^2} (3v_i v_j - v^2 \delta_{ij}) \right), \quad (16.44)$$

$$D_0 \equiv \frac{(qq^*)^2 n^* \ln \Lambda}{4\pi \epsilon_0^2 m^2 v_T^*} \equiv \frac{v_T^{*2} \nu_0}{2}, \quad (16.45)$$

и кинетическое уравнение

$$\left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{F.P.}} = -\nabla_v \cdot \mathbf{J}.$$

Напомним, что A_i — коэффициент динамического трения, D_{ij} — компонента тензора диффузии. Предположим, что функция распределения по поперечным скоростям v_x, v_y является

максвелловской. Тогда одномерное уравнение Фоккера—Планка для функции распределения $F(w) = \int f dv_x dv_y$ по параллельной скорости $w = v_z/v_{Te}^*$ может быть получено интегрированием по (v_x, v_y) :

$$\begin{aligned} \iint \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{Ф.П.}} dv_x dv_y &= \iint (-\nabla_v \cdot \mathbf{J}) dv_x dv_y = \\ &= \iint \frac{\partial}{\partial v_z} \left(-A_z f + \sum_j D_{zj} \frac{\partial f}{\partial v_j} \right) dv_x dv_y. \end{aligned}$$

При $|v_z| \gg |v_x|, |v_y|$ можно воспользоваться приближением $v \approx |v_z|$. В результате одномерное уравнение Фоккера—Планка для $F(w)$ принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial w} \left(D(w) \frac{\partial F}{\partial w} \right) + \left(1 + \frac{Z}{2} \right) \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{w^3} \frac{\partial}{\partial w} + \frac{1}{w^2} \right) F(w),$$

и стационарное решение

$$F(w) = C \exp \int \frac{-w dw}{1 + w^3 D(w)/(1 + Z/2)}.$$

Функция $F(w)$ схематически показана на рис. 16.18 (когда $D(w) = 0$, получается максвелловское распределение). $F(w)$ несимметрична относительно $w = 0$, так что существует электрический ток. Плотность J такого тока равна

$$J = env_{Te}^* j,$$

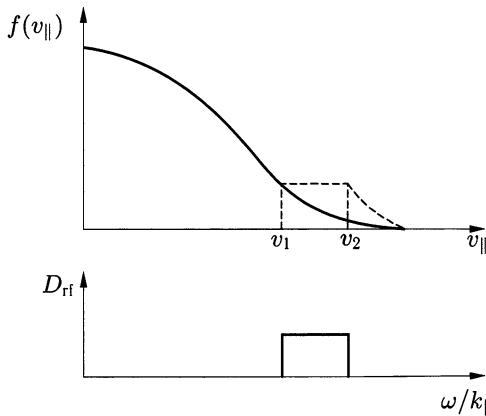


Рис. 16.18. Функция распределения $f(v_{\parallel})$ электронов, выположенная в диапазоне от $v_1 = c/N_1$ до $v_2 = c/N_2$ за счет взаимодействия с нижнегибридной волной, чей продольный показатель преломления N_{\parallel} изменяется от N_1 до N_2

где $j = \int wF(w)dw$, и

$$j \approx \frac{w_1 + w_2}{2} F(w_1)(w_2 - w_1). \quad (16.46)$$

С другой стороны, этот ток диссипирует за счет кулоновских столкновений. Следовательно, для поддержания тока необходимо восполнять диссипированную энергию из энергии волны. Необходимая мощность

$$\begin{aligned} P_d &= - \int \frac{nmv^2}{2} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{Ф.Р.}} d\mathbf{v} = \int \frac{nmv^2}{2} \frac{\partial}{\partial v_z} \left(D_{\text{rf}} \frac{\partial f}{\partial v_z} \right) d\mathbf{v} = \\ &= nmv_{\text{Te}}^{*2} \nu_0 \int \frac{w^2}{2} \frac{\partial}{\partial w} \left(D(w) \frac{\partial F}{\partial w} \right) dw = nmv_{\text{Te}}^{*2} \nu_0 p_d, \end{aligned}$$

где p_d находится с использованием стационарного решения для $F(w)$ в предположении $w^3 D(w) \gg 1$, т. е.

$$p_d = \left(1 + \frac{Z}{2} \right) F(w_1) \ln \left(\frac{w_2}{w_1} \right) \approx \left(1 + \frac{Z}{2} \right) F(w_1) \frac{w_2 - w_1}{w_1},$$

и

$$\frac{j}{p_d} = \frac{1,5}{1 + 0,5Z_i} \frac{2}{3} w^2. \quad (16.47)$$

Более точно, это отношение выглядит так [38]:

$$\frac{j}{p_d} = \frac{1,12}{1 + 0,12Z_i} 1,7w^2. \quad (16.47')$$

Отношение плотности тока J к мощности P_d на единицу объема, необходимой для поддержания тока, дается выражением

$$\frac{J}{P_d} = \frac{env_{\text{Te}}^* j}{nT_e \nu_0 p_d} = 0,16 \frac{\kappa T_{\text{keV}}}{n_{19}} \langle w^2 \rangle \frac{1,12}{1 + 0,12Z_i} \left(\frac{\text{А/м}^2}{\text{Вт/м}^3} \right), \quad (16.48)$$

где κT_{keV} — температура электронов в кэВ, а n_{19} — плотность электронов в единицах 10^{19}м^{-3} .

Отношение полного генерируемого тока I_{CD} к мощности W_{LH} , вводимой в нижегибридных волнах,

$$\frac{I_{\text{CD}}}{W_{\text{LH}}} = \frac{1}{2\pi R} \frac{\int J 2\pi r dr}{\int P_d 2\pi r dr},$$

и эффективность генерации тока с помощью этих волн

$$\eta_{\text{LH}}^{\text{T}} \equiv \frac{Rn_{19}I_{\text{CD}}}{W_{\text{LH}}} = \frac{\int \eta_{\text{LH}}(r)P_d(r)2\pi r dr}{\int P_d(r)2\pi r dr},$$

где $\eta_{\text{LH}}(r)$ — локальная эффективность генерации тока, равная

$$\eta_{\text{LH}}(r) = \frac{Rn_{19}J(r)}{2\pi RP_d(r)} = 0,026(\kappa T_e)_{\text{keV}} \langle w^2 \rangle \frac{1,12}{1 + 0,12Z_i}. \quad (16.49)$$

Здесь R — большой радиус в метрах, а величины η измеряются в 10^{19} А/Вт·м². Средний квадрат $\langle w^2 \rangle$ отношения фазовой скорости (в направлении магнитного поля) бегущих волн к тепловой скорости электронов порядка 20–50. В экспериментах на JT60U (1994) плазменный ток $I_p = 3$ МА возбуждался инжекцией нижнегибридной волны с $W_{\text{LH}} = 4,8$ МВт при $n = 1,2 \cdot 10^{19}$ м⁻³, $\langle \kappa T_e \rangle \approx 2$ кэВ, $R = 3,5$ м и $B_t = 4$ Т ($\eta_{\text{LH}} \approx 2,6$). Результаты этих экспериментов согласуются с теоретическими результатами.

Впервые эксперименты по подъему тока спомощью нижнегибридных волн (LHCD) проводились на WT-2, PLT и на других установках запуском нижнегибридной волны в плазму, созданную при помощи электронного циклотронного нагрева и с помощью других типов нагрева. Когда ток в плазме низкой плотности нарастает и плотность плазмы увеличивается, по достижении током определенной величины весь доступный магнитный поток индуктора может быть использован для поддержания достигнутого тока, так что продолжительность разряда возрастает в несколько раз.

Мощность, необходимая для возбуждения тока, пропорциональна плотности, и генерация тока нижнегибридной волной ниже некоторой пороговой плотности просто невозможна из-за условия распространения волны (см. разд. 12.5). Изучались и другие возможные методы генерации тока с использованием волн в диапазоне циклотронных частот (разд. 16.8b), быстрых волн или пучков нейтралов (разд. 16.8c).

16.8b. Возбуждение тока электронными циклотронными волнами

Возбуждение тока при введении в плазму электронной циклотронной волны (ЕССД) связано с возникновением асимметрии сопротивления плазмы благодаря селективному нагреву электронов, движущихся преимущественно в тороидальном направлении. Фиш и Бузер [40] предложили считать, что в этом случае каким-то образом меняется столкновительность плазмы, напри-

мер, электроны, движущиеся влево, реже сталкиваются с ионами, чем электроны, движущиеся вправо. Это могло бы привести к возникновению электрического тока с электронами, движущимися в среднем влево, и с ионами, движущимися вправо.

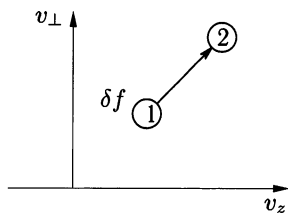


Рис. 16.19. Смещение электронов в пространстве скоростей из точки 1 в точку 2

Рассмотрим смещение электронов плотности δf в пространстве скоростей из точки 1 в точку 2, как показано на рис. 16.19. Энергия, связанная с этим смещением,

$$\Delta E = (E_2 - E_1)\delta f,$$

где E_i — кинетическая энергия в i -ом положении в пространстве скоростей. Электроны с первоначальными координатами 1 теряют свой импульс вдоль магнитного поля, которое считается направленным вдоль z , со скоростью ν_1 , а затем со скоростью ν_2 . Возникающий ток, направленный вдоль z , дается выражением

$$j(t) = -e\delta f(v_{z2} \exp(-\nu_2 t) - v_{z1} \exp(-\nu_1 t)). \quad (16.50)$$

Рассмотрим сглаженный во времени ток J на протяжении интервала времени Δt , который велик по сравнению с обеими величинами $1/\nu_1$ и $1/\nu_2$, так что

$$J = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} j(t) dt = -\frac{e\delta f}{\Delta t} \left(\frac{v_{z2}}{\nu_2} - \frac{v_{z1}}{\nu_1} \right).$$

Плотность вводимой мощности P_d , необходимой для возбуждения такой плотности тока, будет равна

$$P_d = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{E_2 - E_1}{\Delta t} \delta f.$$

Отношение J/P_d составляет

$$\frac{J}{P_d} = -e \frac{v_{z2}/\nu_2 - v_{z1}/\nu_1}{E_2 - E_1} = -e \frac{\mathbf{s} \cdot \nabla(v_z/\nu)}{\mathbf{s} \cdot \nabla E}, \quad (16.51)$$

где \mathbf{s} — единичный вектор в направлении смещения в пространстве скоростей. Оценим ν в (16.51). Скорость торможения пробного электрона вследствие столкновений с электронами и ионами выражается как (см. (2.14), (2.20))

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\tau_{ee\parallel}} - \frac{p}{\tau_{ei\parallel}} = -\left(1 + \frac{Z_1}{2}\right) \frac{\nu_0}{u^3} p,$$

где

$$\nu_0 = \left(\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \right)^2 \frac{\ln \Lambda}{2\pi n_e v_{Te}^3}, \quad u \equiv \frac{v}{v_{Te}},$$

$v_{Te} = (\kappa T_e / m_e)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов. Поэтому имеем:

$$\frac{dp}{dt} = -\nu_M p, \quad \nu_M \equiv (2 + Z_i) \frac{\nu_0}{2u^3}.$$

Чтобы оценить du/dt , следует воспользоваться временем релаксации энергии τ_{ee}^ϵ (см. (2.27))

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E}{\tau_{ee}^\epsilon}, \quad E = \frac{m_e}{2} u^2 v_{Te}^2,$$

т. е.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u}{2\tau_{ee}^\epsilon} = -\frac{\nu_0}{2u^3} u.$$

Поскольку

$$-\int \nu_M dt = -\int \nu_M \frac{dt}{du} du = (2 + Z_i) \int \frac{du}{u} = (2 + Z_i) \ln u(t) u_0,$$

каждый член в уравнении (16.50) для $j(t)$ следует модифицировать следующим образом:

$$j(t) = j_0 \exp(-\int \nu_M dt) = j_0 \left(\frac{u(t)}{u_0} \right)^{2+Z_i}, \quad (16.50')$$

Тогда интеграл от $j(t)$ (16.50') сводится к

$$\int_0^\infty j(t) dt = j_0 \int_{u_0}^0 \left(\frac{u(t)}{u_0} \right)^{2+Z_i} \frac{dt}{du} du = \frac{j_0}{\nu_0} \frac{2u_0^3}{5 + Z_i}.$$

Соответственно, ν в (16.51) равно

$$\nu = \nu_0 \frac{5 + Z_i}{2u^3}, \quad (16.52)$$

и

$$\frac{J}{P_d} = \frac{en_e v_{Te}}{n_e T_e \nu_0} \frac{j}{p_d}, \quad \frac{j}{p_d} \equiv \frac{4}{5 + Z_i} \frac{\mathbf{s} \cdot \nabla (u^3 w)}{\mathbf{s} \cdot \nabla u^2},$$

где $w \equiv v_z / v_{Te}$. В случае возбуждения тока электронными циклотронными волнами имеем $j/p_d \approx 6wu/(5 + Z_i)$, и

$$\frac{J}{P_d} = \frac{en_e v_{Te}}{n_e T_e \nu_0} \frac{\langle 6wu \rangle}{5 + Z_i} = 0,096 \frac{(\kappa T_e)_{\text{keV}} \langle 6wu \rangle}{n_{19} (5 + Z_i)}. \quad (16.53)$$

Отношение генерируемого тока I_{CD} к мощности W_{EC} , вводимой с этими волнами, составляет

$$\frac{I_{CD}}{W_{EC}} = \frac{1}{2\pi R} \frac{\int J 2\pi r dr}{\int P_d 2\pi r dr},$$

и эффективность генерации тока, η_{EC}^T , равна

$$\eta_{EC}^T \equiv \frac{R n_{19} I_{CD}}{W_{CD}} = \frac{\int \eta_{EC}(r) P_d(r) 2\pi r dr}{\int P_d 2\pi r dr},$$

где $\eta_{EC}(r)$ — локальная эффективность генерации тока, которая дается выражением

$$\eta_{EC}(r) = \frac{R n_{19} J(r)}{2\pi R P_d} = 0,015 (\kappa T_e)_{keV} \frac{(6wu)}{5 + Z_i}. \quad (16.54)$$

Напомним, что эффективность мы измеряем в 10^{19} А/Вт·м².

16.8с. Нейтральная инжекция и возбуждение тока

Когда пучок быстрых нейтралов инжектируется в плазму, он превращается в пучок быстрых ионов из-за процессов перезарядки и ионизации. Быстрые ионы с энергией выше величины $E_{cr} = m_b v_{cr}^2/2$, данной в (2.33), тормозятся преимущественно за счет столкновений с электронами плазмы. Быстрые же ионы с $E < E_{cr}$ тормозятся в основном ионами плазмы. Функция распределения для пучка ионов может быть получена в результате решения уравнений Фоккера—Планка. Столкновительный фоккер—планковский член в выражении (16.40) для быстрых ионов с $E \gg E_{cr}$ в основном обусловлен динамическим трением при столкновениях с электронами. Динамическое трение электронов о быстрые ионы в случае $v < v_T^*$ дается выражением [39]

$$A = -\frac{v}{2\tau_{be}^\epsilon}.$$

При этом уравнение Фоккера—Планка сводится к виду

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{-v f_b}{2\tau_{be}^\epsilon} \right) = \phi \delta(v - v_b), \quad (16.55)$$

где v_b — начальная скорость инжекции, τ_{be}^ϵ — время релаксации энергии ионов и электронов пучка, см. формулу (2.34). Правая

часть уравнения — это член с источником ионов пучка. Стационарное решение уравнения Фоккера—Планка есть

$$f_b \propto 1/v.$$

В области $v < v_{cr}$ в столкновительном члене доминирует член с динамическим трением на ионах или член с диффузией. Поэтому приближенно функция распределения в ионном пучке дается выражением $f_b \propto v^2/(v^3 + v_{cr}^3)$, т. е.

$$f_b(v) = \frac{n_b}{\ln(1 + (v_b/v_{cr})^3)^{1/3}} \frac{v^2}{v^3 + v_{cr}^3} \quad (v \leq v_b), \quad (16.56)$$

$$f_b(v) = 0 \quad (v > v_b). \quad (16.56')$$

Скорость инжекции ионов ϕ на единицу времени и объема, необходимая для поддержания стационарного пучка, получается при подстановке найденной $f_b(v)$ в уравнение Фоккера—Планка:

$$\phi = \frac{n_b}{2\tau_{be}^\epsilon} \frac{(1 + (v_{cr}/v_b)^3)^{-1}}{(\ln(1 + (v_b/v_{cr})^3))^{1/3}},$$

а необходимая мощность

$$P_b = \frac{m_b v_b^2}{2} \phi \approx \frac{m_b v_b^2 n_b}{4 \ln(v_b/v_{cr}) \tau_{be}^\epsilon}. \quad (16.57)$$

Средняя скорость тормозящегося ионного пучка

$$\bar{v}_b = v_b (\ln(v_b/v_{cr}))^{-1}. \quad (16.58)$$

Плотность тока J , возбуждаемого пучком быстрых ионов, состоит из вклада быстрых ионов пучка и вклада основных ионов и электронов плазмы:

$$J = Z_i e n_i \bar{v}_i + Z_b e n_b \bar{v}_b - e n_e \bar{v}_e, \\ n_e = Z_i n_i + Z_b n_b,$$

где \bar{v}_i и \bar{v}_e — средние скорости ионов с плотностью n_i и электронов с плотностью n_e , соответственно. Электроны плазмы получают импульс при столкновениях с быстрыми ионами и теряют его при столкновениях с ионами плазмы, т. е.

$$m_e n_e \frac{d\bar{v}_e}{dt} = m_e n_e (\bar{v}_b - \bar{v}_e) \nu_{eb\parallel} + m_e n_e (\bar{v}_i - \bar{v}_e) \nu_{ei\parallel} = 0,$$

так что

$$(Z_i^2 n_i + Z_b^2 n_b) \bar{v}_e = Z_b^2 n_b \bar{v}_b + Z_i^2 n_i \bar{v}_i.$$

Поскольку $n_b \ll n_i$, то

$$n_e \bar{v}_e = \frac{Z_b^2}{Z_i} n_b \bar{v}_b + Z_i n_i \bar{v}_i,$$

так что [36]

$$J = \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i}\right) Z_b e n_b \bar{v}_b. \quad (16.59)$$

Плотность возбуждаемого тока состоит из вклада быстрых ионов пучка $Z_b e n_b \bar{v}_b$ и вклада электронов, увлеченных быстрыми ионами, $-Z_b^2 e n_b \bar{v}_b / Z_i$. Отношение J/P_d таково:

$$\frac{J}{P_d} = \left(1 - Z_b/Z_i\right) \frac{Z_b e n_b \bar{v}_b}{m_b n_b v_b \bar{v}_b / 4\tau_{be}^\epsilon} = \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_b} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i}\right). \quad (16.60)$$

Когда заряд ионов пучка равен заряду ионов плазмы ($Z_b = Z_i$), плотность возбуждаемого тока в случае линейной (цилиндрической) плазмы обращается в нуль. В тороидальной плазме движение циркулирующих вдоль тора электронов возмущается столкновениями с запертыми (банановыми) электронами, и член с увлеченными электронами уменьшается. При этом J/P_d становится равным [41]

$$\frac{J}{P_d} = \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_b} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G(Z_{\text{eff}}, \epsilon))\right), \quad (16.60')$$

$$G(Z_{\text{eff}}, \epsilon) = \left(1,55 + \frac{0,85}{Z_{\text{eff}}}\right) \epsilon^{1/2} - \left(0,2 + \frac{1,55}{Z_{\text{eff}}}\right) \epsilon, \quad (16.61)$$

где ϵ — обратное аспектное отношение. При учете влияния питч-угла ионизованного пучка правую часть (16.60') следует умножить на $\xi \equiv v_{\parallel} / v = R_{\text{tang}} / R_{\text{ion}}$, где R_{tang} — минимальная величина R вдоль хода пучка нейтралов, а R_{ion} — значение R в месте ионизации.

Эффективность генерации, вычисленная из уравнения Фокера—Планка, усредненного по баунс-частоте, равна [41]

$$\frac{J}{P_d} = \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_b} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G(Z_{\text{eff}}, \epsilon))\right) \xi_0 F_{\text{nc}} x_b J_0(x_b, y),$$

или

$$\frac{J}{P_d} = \frac{2e Z_b (2\tau_{be}^\epsilon)}{m_b v_{\text{cr}}} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G(Z_{\text{eff}}, \epsilon))\right) \xi_0 F_{\text{nc}} J_0(x_b, y), \quad (16.62)$$

где

$$x_b \equiv \frac{v_b}{v_{\text{cr}}}, \quad y = 0,8 \frac{Z_{\text{eff}}}{A_b},$$

$$J_0(x, y) = \frac{x^2}{x^3 + (1,39 + 0,61y^{0,7})x^2 + (4 + 3y)}$$

и $F_{nc} = 1 - b\epsilon^\sigma$ — поправочный множитель [41]. Окончательно имеем

$$\frac{J}{P_d} \left(\frac{\text{Ам}}{\text{Вт}} \right) = \frac{15,8(\kappa T_e)_{\text{кеВ}} \xi_0}{Z_b n_{e19}} \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G) \right) (1 - b\epsilon^\sigma) J_0(x_b, y). \quad (16.63)$$

Локальная эффективность η_{NB} генерации тока с помощью инжекции пучка нейтралов равна (в единицах $10^{19} \text{ А/Вт} \cdot \text{м}^2$)

$$\eta_{\text{NB}} \equiv \frac{R n_{e19} J}{2\pi R P_d} = 2,52(\kappa T_e)_{\text{кеВ}} \xi_0 \left(1 - \frac{Z_b}{Z_i} (1 - G) \right) (1 - b\epsilon^\sigma) J_0(x_b, y). \quad (16.64)$$

Если $Z_b = 1$, $Z_{\text{eff}} = 1,5$, $A_b = 2$, $x_b^2 = 4$, то $((1 - b\epsilon^\sigma) J_0) \approx 0,2$. При $\langle \epsilon \rangle \approx 0,15$ величина $\eta_{\text{NB}} \approx 0,29(\kappa T_e)_{\text{кеВ}} [10^{19} \text{ А/Вт} \cdot \text{м}^2]$, $(\kappa T_e)_{\text{кеВ}}$ измеряется в кэВ. Генерация тока с помощью инжекции нейтралов демонстрировалась в экспериментах на DITE, TFTR, JT60U и JET.

При генерации тока в термоядерной плазме с $n_e \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$ необходимая вводимая мощность при любом механизме генерации полного тока в плазме будет составлять заметную часть термоядерного выхода. Поэтому значительная доля плазменного тока должна быть бутстрэп-током, которому посвящен следующий раздел.

16.8d. Бутстрэп-ток

Теоретически было предсказано, что радиальная диффузия приводит к возбуждению тока в тороидальном направлении, и в банановом режиме этот ток может быть большим [42–45]. Позже наличие такого тока, называемого (*бутстрэп-током*), было уверенно подтверждено экспериментально. Это важное явление может послужить средством поддержания тока в плазме в стационарно работающем токамаке.

Как было описано в разд. 7.2, электроны в бесстолкновительном режиме, $\nu_{ei} < \nu_b$, совершают полный облет банановой орбиты. При наличии градиента плотности существует различие в числе частиц на соседних орбитах, проходящих через точку А, как показано на рис. 16.20. Разница составляет $(dn_t/dr) \Delta_b$, где Δ_b — ширина банановой орбиты. Поскольку компонента скорости, параллельная магнитному полю, по порядку величины составляет $\epsilon^{1/2} v_T$, то плотность тока запертых электронов

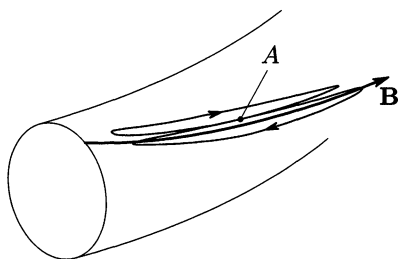


Рис. 16.20. Банановые орбиты запертых электронов, приводящие к генерации бутстрэп-тока

с плотностью n_t равна

$$j_{\text{banana}} = -(ev_{\parallel}) \left(\frac{dn_t}{dr} \Delta_b \right) = -\epsilon^{3/2} \frac{1}{B_p} \frac{dp}{dr}.$$

Пролетные электроны из-за столкновений с запертыми начинают дрейфовать в ту же сторону, что и запертые, и этот дрейф становится стационарным вследствие столкновений с ионами. Дрейфовая скорость $V_{\text{untrapped}}$ пролетных электронов в стационарном состоянии дается выражением

$$m_e V_{\text{untrapped}} \nu_{ei} = \frac{\nu_{ee}}{\epsilon} m_e \left(\frac{j_{\text{banana}}}{-en_e} \right),$$

где ν_{ee}/ϵ — эффективная частота столкновений между запертыми и пролетными электронами. Плотность тока, связанная с дрейфовой скоростью $V_{\text{untrapped}}$, равна

$$j_{\text{boot}} \approx -\epsilon^{1/2} \frac{1}{B_p} \frac{dp}{dr}. \quad (16.65)$$

Этот ток и называется бутстрэп-током. Введем среднее полоидальное бета $\beta_p = \langle p \rangle / (B_p^2 / 2\mu_0)$. Отношение полного бутстрэп-тока I_b к току в плазме I_p , необходимому для формирования полоидального поля B_p , дается выражением

$$\frac{I_b}{I_p} \sim c \left(\frac{a}{R} \right)^{1/2} \beta_p, \quad (16.66)$$

где $c \approx 0,3$ — константа. Эта величина может быть равна и единице, если β_p высока ($\beta_p \sim R/a$), а профиль давления пикирован. Эксперименты по бутстрэп-току проводились на TFTR, JT60U и JET. В режиме работы с высокой β_p почти 70–80% плазменного тока $I_p \approx 1$ МА составлял возбуждаемый бутстрэп-ток.

Если бутстрэп-ток имеет полый профиль, это может давать профиль q с отрицательным магнитным широм, устойчивый от-

носителем баллонных мод. МГД устойчивость полых профилей тока детально проанализирована в работе [46].

§ 16.9. Неоклассическая тиринг-мода

Значительное внимание было уделено предельному для работы токамака давлению плазмы, связанному с неидеальными МГД неустойчивостями, такими как эффект от магнитных островов, возбуждаемых бутстрэп-током. При высоком полоидальном бета β_p и низкой столкновительности градиент давления плазмы вызывает возникновение бутстрэп-тока (см. разд. 16.8d). С увеличением острова давление плазмы в нем стремится выровняться, тем самым устраняется сама причина генерации бутстрэп-тока. Это приводит к появлению винтовой «дыры» в профиле бутстрэп-тока и к дальнейшему росту размеров острова (см. рис. 16.23).

Тиринг-неустойчивость рассматривалась в разд. 9.1 в рамках плоской модели. В нулевом приближении магнитное поле \mathbf{B}_0 зависит только от x и дается выражением $\mathbf{B}_0 = B_{0y}(x)\mathbf{e}_y + B_{0z}\mathbf{e}_z$, $|B_{0y}(x)| \ll |B_{0z}|$, $B_{0z} = \text{const}$. Основные уравнения:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (16.67)$$

$$-\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{A} = (0, 0, -\psi),$$

$$B_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad B_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (16.68)$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} = (v_x B_y - v_y B_x) - \eta j_z = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \psi - \eta j_z, \quad (16.68')$$

$$\nabla^2 \psi = \mu_0 j_z. \quad (16.69)$$

Поскольку

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \left(\frac{E_y}{B_{0z}}, -\frac{E_x}{B_{0z}}, 0 \right) = \left(-\frac{1}{B_{0z}} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{1}{B_{0z}} \frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right),$$

то можно ввести функцию потока φ , такую что

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Кроме того, вводя z -компоненту завихренности, $w_z = (\nabla \times \mathbf{v})_z$, имеем $w_z = \nabla^2 \varphi$. Для вращения, описываемого (16.67),

$$\rho \frac{\partial w_z}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) w_z = (\nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}))_z =$$

$$= (\mathbf{B} \cdot \nabla) j_z - (\mathbf{j} \cdot \nabla) B_z = (\mathbf{B} \cdot \nabla) j_z. \quad (16.70)$$

Мы использовали равенства $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Поточковая функция нулевого порядка ψ_0 и первый порядок возмущения $\tilde{\psi}$ суть

$$\psi_0(x) = B'_{0y} \frac{x^2}{2}, \quad \mathbf{B}_0 = (0, B'_{0y} x, B_{0z}),$$

$$\tilde{\psi}(y, t) = \frac{B_{1x}(t)}{k} \cos ky, \quad \mathbf{B}_1 = (B_{1x}(t) \sin ky, 0, 0),$$

$$\tilde{\psi}_A(t) \equiv \frac{B_{1x}(t)}{k},$$

$$\psi = \psi_0(x) + \tilde{\psi}(y, t) = B'_{0y} \frac{x^2}{2} + \frac{B_{1x}(t)}{k} \cos ky. \quad (16.71)$$

Здесь $x = 0$ — положение сингулярного слоя. Координаты сепаратрисы острова удовлетворяют уравнению

$$B'_{0y} \frac{x^2}{2} + \frac{B_{1x}(t)}{k} \cos ky = \frac{B_{1x}(t)}{k}, \quad x_s = 2 \left(\frac{B_{1x}(t)}{kB'_{0y}} \right)^{1/2},$$

а полная ширина острова w равна

$$w = 4 \left(\frac{B_{1x}(t)}{kB'_{0y}} \right)^{1/2} = 4 \left(\frac{\tilde{\psi}_A(t)}{B'_{0y}} \right)^{1/2}. \quad (16.72)$$

Возмущение $B_{1x}(t) \sin ky$, нарастающее с инкрементом γ , приводит к возникновению тока $j_{1z} = E_{1z}/\eta = \gamma B_{1x}/\eta k$, который создает линейную силу в направлении x , $f_{1x} = -j_{1z} B'_{0y} x$, как изображено на рис. 16.21. Эти силы возбуждают течения в виде узких вихрей. Вне резистивного сингулярного слоя наведенное электрическое поле возбуждает поток $v_x = -E_z/B_y = -\gamma B_{1x} \cos ky / (kB'_{0y} x)$. Несжимаемость потока (в сильном равновесном поле B_{0z}) требует сильного его сдвига $v_y(x)$ по ширине слоя $x \sim x_T$, что и показано на рис. 16.21 в виде узора из узких вихрей, так что

$$v_y x_T \sim v_x/k, \quad v_y \sim v_x/k x_T \sim \gamma B_{1x} / (k^2 B'_{0y} x_T).$$

Чтобы скручивание линейными силами могло возбудить такое сдвиговое течение, преодолев инерцию, необходимо:

$$x_T j_{1z} B_{0y} = \gamma \rho v_y / k,$$

$$B_{0y} = B'_{0y} x_T, \rightarrow x_T^4 = \frac{\gamma \rho}{j_{1z} k B'_{0y}} \frac{\gamma B_{1x}}{k^2 B'_{0y}} = \frac{\gamma \rho \eta}{(k B'_{0y})^2},$$

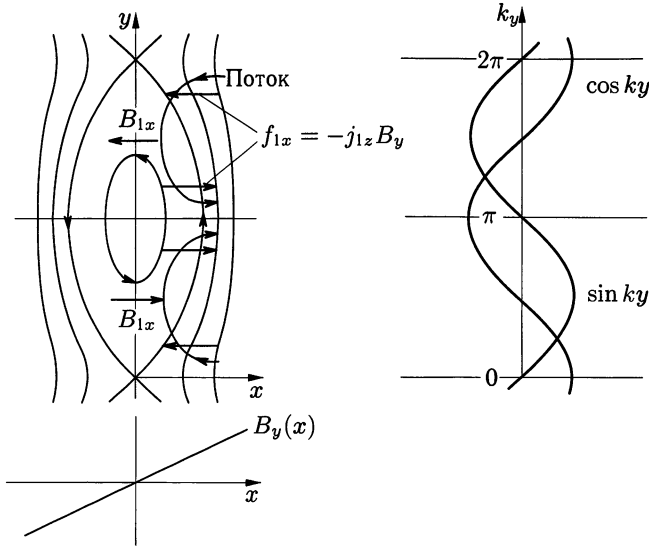


Рис. 16.21. Структура тиринг-моды в сингулярном слое

поскольку $j_{1z} = E_z/\eta = \gamma B_{1x}/\eta k$. Определенная так ширина возмущения равна [47]

$$x_T = \frac{(\gamma \rho \eta)^{1/4}}{(k B'_{0y})^{1/2}}. \tag{16.73}$$

Это согласуется с результатами (9.26) и (9.27), полученными в линейной теории тиринг-моды и описанными в разд. 9.1 (вместо x_T в разд. 9.1 использовалось обозначение ϵ).

Резерфорд [47] показал, что нелинейные эффекты сильно замедляют скорость роста моды, так что возмущение нарастает во времени лишь линейно. Завихренное течение будет наводить не зависящий от y краевой ток второго порядка $\delta j_{1z} = -v_y B_{1x}/\eta \sim \gamma B_{1x}^2/(\eta k^2 B'_{0y} x_p^2)$. Направленные вдоль y нелинейные силы третьего порядка, $\delta f_y \sim \delta j_z B_{1x}$, изображенные на рис. 16.22, противодействуют вихревому течению (тормозят поток v_y).

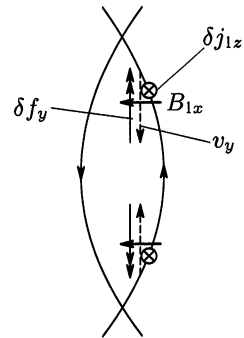


Рис. 16.22. Нелинейные силы, тормозящие поток v_y в тиринг-моды

Ограничимся случаем, когда инерцией в уравнении (16.70) можно пренебречь:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)j_z = -\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial j_z}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial j_z}{\partial y} = 0, \quad \rightarrow \quad j_z = j_z(\psi).$$

Уравнение (16.68') дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_0}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} &= -v_x B'_{0y} x + \eta j_{1z}, \\ \frac{\partial\psi_0}{\partial t} = \eta j_{0z}, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} B'_{0y} x + \eta j_{1z} - \eta j_{0z}. \end{aligned} \quad (16.68'')$$

Мы можем исключить φ из (16.68''), разделив на x и усреднив по y вдоль постоянной ψ . Из (16.71) имеем

$$\begin{aligned} x = \left(\frac{2}{B'_{0y}} (\psi - \tilde{\psi}) \right)^{1/2} &= \left(\frac{2}{B'_{0y}} \right) \tilde{\psi}_A^{1/2} (W - \cos ky)^{1/2}, \quad (16.74) \\ W &\equiv \frac{\psi}{\psi_A}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle (\eta j_{1z}(\psi) - \eta j_{0z}(\psi)) &= \left\langle \frac{\partial\tilde{\psi}(y, t)/\partial t}{(\psi - \tilde{\psi}(y, t))^{1/2}} \right\rangle, \\ j_{1z}(\psi) = j_{0z}(\psi) + \frac{1}{\eta} \left\langle \frac{\partial\tilde{\psi}/\partial t}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle \left\langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \right\rangle^{-1}, \end{aligned} \quad (16.75)$$

где

$$\langle f \rangle \equiv \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} f dy.$$

Для сшивки с внешним решением потребуем разрывности логарифмических производных в месте особенности:

$$\Delta' \equiv \left(\frac{\partial\tilde{\psi}_A}{\partial x} \Big|_{+0} - \frac{\partial\tilde{\psi}_A}{\partial x} \Big|_{-0} \right) \frac{1}{\tilde{\psi}_A} = \frac{\partial}{\partial x} \ln \tilde{\psi}_A \Big|_{-0}^{+0}.$$

Воспользуемся тем, что $\nabla^2 \tilde{\psi} = \mu_0 j_{1z}$, $\partial^2 \tilde{\psi} / \partial x^2 \approx \mu_0 j_{1z}$ и

$$\Delta' \tilde{\psi}_A = 2\mu_0 \left\langle \cos ky \int_{-\infty}^{\infty} j_{1z} dx \right\rangle, \quad (16.76)$$

$$dx = \left(\frac{1}{B'_{0y}} \right)^{1/2} \frac{d\psi}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}}.$$

Подстановка (16.75) в (16.76) дает

$$\begin{aligned} \Delta' \tilde{\psi}_A &= 2 \frac{\mu_0}{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi} / \partial t}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle \left\langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \right\rangle^{-1} \times \\ &\quad \times \cos ky \left(\frac{1}{B'_{0y}} \right)^{1/2} \frac{d\psi}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} = \\ &= \frac{4\mu_0}{\eta (2B'_{0y})^{1/2}} \int_{\psi_{\min}}^{\infty} d\psi \left\langle \frac{\partial \tilde{\psi}_A \cos ky / \partial t}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle \left\langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \right\rangle^{-1} \left\langle \frac{\cos ky}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int d\psi \left\langle \frac{\cos ky}{(\psi - \tilde{\psi})^{1/2}} \right\rangle^2 \frac{1}{\left\langle (\psi - \tilde{\psi})^{-1/2} \right\rangle} &= \\ = \int \left\langle \frac{\cos ky}{(W - \cos ky)^{1/2}} \right\rangle^2 \frac{dW \tilde{\psi}_A}{\langle (W - \cos ky)^{-1/2} \rangle} &\equiv A \tilde{\psi}_A^{1/2}, \end{aligned}$$

получаем

$$\Delta' \tilde{\psi}_A = \frac{4\mu_0 A}{\eta (2B'_{0y})^{1/2}} \frac{\partial \tilde{\psi}_A}{\partial t} \tilde{\psi}_A^{1/2}$$

и

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_A^{1/2}}{\partial t} = \frac{\eta (2B'_{0y})^{1/2}}{8\mu_0 A} \Delta'.$$

С учетом (16.72) изменение во времени ширины острова сводится к

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2^{1/2} A} \frac{\eta}{\mu_0} \Delta' \approx \frac{\eta}{\mu_0} \Delta', \quad \tau_R \frac{dw}{dt} r_s = \Delta' r_s, \quad \tau_R \equiv \frac{\mu_0 r_s^2}{\eta}. \quad (16.77)$$

Рассмотрим тороидальную плазму, показанную на рис. 16.23. Магнитное поле

$$B_p - \frac{nr}{nR} B_t = \left(\frac{1}{q(r)} - \frac{1}{q_s} \right) \frac{r}{R} B_t \quad (q_s = \frac{m}{n})$$

соответствует B_{0y} в плоской модели (вблизи радиуса особенности). Координаты (x, y, z) отвечают радиальному направлению $r - r_s$, полоидальному направлению $r\theta$ и направлению магнитного поля на рациональной поверхности в тороидальной плазме

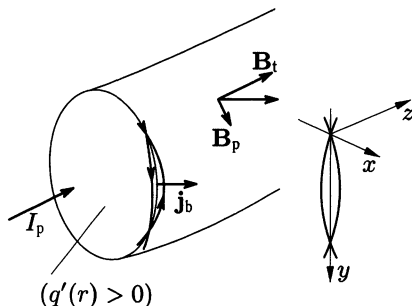


Рис. 16.23. Координаты плоской модели и координаты в тороидальной плазме. Координаты (x, y, z) соответствуют радиальному направлению $r - r_s$, поперечному направлению $r\theta$ и направлению магнитного поля на рациональной поверхности в тороидальной плазме. Стрелки в острове показывают направление магнитного поля $B_p - (nr/mR)B_t$ (см. 16.79)

соответственно (см. рис. 16.23). Поточковая функция выглядит следующим образом:

$$\psi(x, y) = \int_0^{r-r_s} \left(\frac{1}{q(r)} - \frac{1}{q_s} \right) \frac{r}{R} B_t dx + \frac{B_{1x}}{k} \cos ky, \quad (16.78)$$

а магнитное поле дается выражениями

$$B_{1x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = B_{1x} \sin ky,$$

$$B_{0y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \left(\frac{1}{q(r)} - \frac{1}{q_s} \right) \frac{r}{R} B_t = -\frac{q'}{q} B_p x = B'_{0y} x. \quad (16.79)$$

Выражение (16.78) сводится к

$$\psi(x, y) = B'_{0y} \frac{x^2}{2} + \frac{B_{1x}}{k} \cos ky. \quad (16.78')$$

Изменение бутстрэп-тока δj_{1z}^b вызывает изменение поточковой функции $\delta \psi_b$ и электрического поля E_z

$$E_z = \frac{\partial \psi_b}{\partial t} = \eta \delta j_{1z}^b.$$

Разрыв логарифмической производной из-за δj_{1z}^b будет равен

$$\Delta'_b = \frac{1}{\psi_A} \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_A^b}{\partial r} \Big|_{r_{s+}} - \frac{\partial \tilde{\psi}_A^b}{\partial r} \Big|_{r_{s-}} \right) = \frac{1}{\psi_A} \int_{r_{s-}}^{r_{s+}} \mu_0 \delta j_{1z}^b dr,$$

где

$$\tilde{\psi}_A = \frac{B_{1x}}{k} = \frac{w^2 B'_{0y}}{16},$$

так что

$$\Delta'_b = \frac{16}{w^2 B'_{0y}} \int_{r_s^-}^{r_s^+} \mu_0 \delta j_{1z}^b dr.$$

Вследствие уплощения (выполаживания) профиля давления при образовании острова величина δj_{1z}^b дается выражением (см. (16.65))

$$\delta j_{1z}^b = 0 - \left(-\frac{\epsilon_s^{1/2}}{B_p} \frac{dp}{dr} \right) = \frac{\epsilon_s^{1/2}}{B_p} \frac{dp}{dr}. \quad (16.80)$$

Это называется винтовой дырой в бутстрэп-токе. Таким образом, разрыв логарифмической производной из-за δj_{1z}^b сводится к

$$\begin{aligned} \Delta'_b r_s &= \frac{16\mu_0}{w^2 B'_{0y}} \left(\frac{\epsilon_s^{1/2}}{B_p} \frac{dp}{dr} \right)_{r_s} w r_s = \frac{8r_s}{w} \frac{p}{B_p^2 / 2\mu_0} \epsilon_s^{1/2} \frac{L_q}{L_p}, \\ B'_{0y} &= -\frac{q'}{q} B_p \equiv -\frac{B_p}{L_q}, \quad \frac{dp}{dr} \equiv -\frac{p}{L_p}. \end{aligned}$$

Тогда изменение ширины острова во времени описывается уравнением

$$\tau_R \frac{d w}{dt r_s} = \Delta' r_s + a \epsilon_s^{1/2} \beta_p \frac{L_q}{L_p} \frac{r_s}{w}, \quad a \approx 8. \quad (16.81)$$

Первое слагаемое в правой части (16.81) — это слагаемое Резерфорда, а второе — дестабилизирующий член из-за наличия бутстрэп-тока. Таково уравнение неоклассической тиринг-моды.

Из-за переносов поперек острова имеет место снижение бутстрэп-тока. С учетом этого член с бутстрэп-током модифицируется:

$$\tau_R \frac{d w}{dt r_s} = \Delta' r_s + a \epsilon_s^{1/2} \beta_p \frac{L_q}{L_p} \frac{r_s w}{w^2 + w_c^2}, \quad (16.81')$$

где w_c связана с влиянием переносов поперек острова. Эта величина, параметризующая величину вклада $\chi_{\perp} / \chi_{\parallel}$ модели [48], описывается соотношением

$$w_c = 1,8 r_s \left(\frac{8RL_q}{r_s^2 n} \right)^{1/2} \left(\frac{\chi_{\perp}}{\chi_{\parallel}} \right)^{1/4}.$$

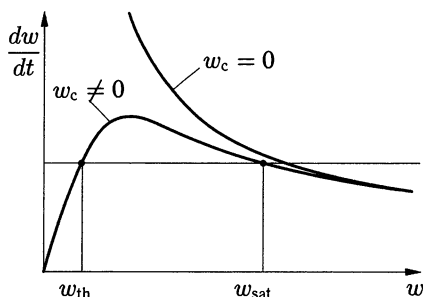


Рис. 16.24. Зависимость $\frac{dw}{dt}$ от w , заданная (16.81'). w_{th} — пороговая ширина острова для установления неоклассической тиринг-моды, w_{sat} — ширина при насыщении

Зависимость dw/dt от w , заданная (16.81'), показана на рис. 16.24. При учете w_c существует порог w_{th} для установления неоклассической тиринг-моды. Когда w становится большим, дестабилизирующий член с бутстрэп-током ослабевает, и ширина острова насыщается. Неоклассическую тиринг-моду можно контролировать за счет локальной генерации тока на рациональной (сингулярной) поверхности [49].

§ 16.10. Моды резистивного кожуха

Винтовые МГД неустойчивости в токамаке (кинк-моды) важны, главным образом, потому, что они дают предел по бета [7, 8]. В отсутствие проводящей стенки, согласно результатам работы [7], полученным для широкого класса профилей тока и давления, этот предел составляет $\beta/(I_p/aB) \equiv \beta_N < 2,8$ (см. (16.9)).

При больших значениях β_N внешняя винтовая мода может быть стабилизирована за счет близко расположенной проводящей стенки (кожуха). В случае, когда идеальная МГД неустойчивость стабилизирована присутствием идеально проводящей стенки, но дестабилизируется, если стенку удалить, ситуация осложняется наличием у стенки конечной резистивности. В этом случае развивается мода, нарастающая за резистивное время стенки. Существует интересный вопрос, стабилизируется ли эта резистивная мода вращением плазмы или нет.

16.10а. Инкремент моды резистивного кожуха

Основные уравнения движения в плоской модели были выписаны в гл. 9, см. (9.9) и (9.13):

$$B_{1x} = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})\xi_x,$$

$$\mu_0 \gamma^2 \nabla \rho_m \nabla \xi_x = i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}) \nabla B_{1x} - i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{B})'' B_{1x}.$$

В цилиндрических координатах соответствующие уравнения имеют вид¹⁾

$$(rB_{1r}) = iF(r\xi_r), \quad (16.82)$$

$$\frac{\mu_0\gamma^2}{F}\nabla\rho_m\nabla(ir\xi_r) = -\nabla^2(rB_{1r}) + \frac{F''}{F}(rB_{1r}), \quad (16.83)$$

где

$$F = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}) = \left(\frac{-m}{r}B_\theta + \frac{n}{R}B_z\right) = \frac{B_z}{R}\left(n - \frac{m}{q(r)}\right) = \frac{B_\theta}{r}(nq(r) - m).$$

Вводя z -компоненту векторного потенциала, потоковую функцию $\psi = A_z(r, \theta) = A_z(r) \exp(-m\theta)$, имеем

$$B_{1r} = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} = -i\frac{m}{r}\psi, \quad B_z = -\frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

При этом (16.83) сводится к

$$\frac{\mu_0\gamma^2}{F}\nabla\rho_m\nabla_\perp\frac{\psi}{F} = -\nabla^2\psi - \frac{m\mu_0}{F}\frac{j'}{r}\psi, \quad F'' \approx -\frac{m\mu_0 j'}{r}. \quad (16.83')$$

Для анализа, прежде всего, воспользуемся ступенчатой моделью, показанной на рис. 16.25, т. е.

$$j(r) = j_0, \quad \rho(r) = \rho_0, \quad q(r) = q, \quad \text{при } r < a,$$

и $j(r) = 0, \rho(r) = 0, q(r) = q(r)$ при $r < a$. Тогда из (16.83') имеем

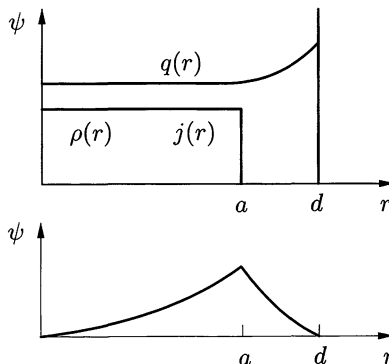


Рис. 16.25. Вверху: профили плотности массы $\rho(r)$, плотности тока $j(r)$ и профиль $q(r)$. Радиус плазмы $r = a$, стенка располагается при $r = d$. Внизу: профиль потоковой функции $\psi(r)$ в случае проводящей стенки

¹⁾ В этом разделе автор называет инкрементом величину $\gamma = -i\omega$. — Примеч. ред.

при $r < a$

$$\left(1 + \frac{\mu_0 \rho_0 \gamma^2}{F^2}\right) \nabla^2 \psi = 0, \quad \psi(r) = \psi_0 \left(\frac{r}{a}\right)^m, \quad \frac{\psi(a_-)'}{\psi(a)} = \frac{m}{a}, \quad (16.83'')$$

а при $r > a$

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad \psi(r) = \frac{\psi(a)}{1 - \alpha} \left(\left(\frac{r}{a}\right)^{-m} - \alpha \left(\frac{r}{a}\right)^m \right).$$

Если при $r = d$ расположена проводящая стенка, должно выполняться условие $\psi(d) = 0$, и $\alpha = (a/d)^{2m}$. Тогда

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} = -\frac{m}{a} \frac{1 + (a/d)^{2m}}{1 - (a/d)^{2m}}. \quad (16.83''')$$

На границе плазмы (16.83') дает

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} - \left(1 + \frac{\mu_0 \rho_0 \gamma^2}{B_\theta^2 (nq - m)^2 / a^2}\right) \frac{\psi'(a_-)}{\psi(a)} = \frac{m \mu_0 j_0}{F a} = \frac{m}{a} \frac{2}{(nq - m)}, \quad (16.84)$$

поскольку для плоского профиля тока $\mu_0 j_0 = 2B_\theta/a$. Инкремент $\gamma_c(d)$ МГД возмущения в присутствии при $r = d$ проводящей стенки сводится к (см. (16.83'', 16.83''') и (16.84))

$$\gamma_c^2(d) \tau_{A\theta}^2 = -2(nq - m) \left(1 + \frac{(nq - m)}{1 - (a/d)^{2m}}\right). \quad (16.85)$$

Область устойчивости на плоскости параметров d/a и q показана на рис. 16.26.

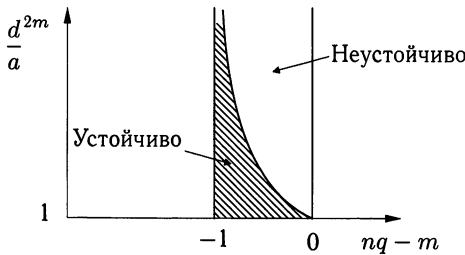


Рис. 16.26. Область устойчивости в зависимости от $(nq - m)$ и d/a

Когда вместо идеально проводящего кожуха при $r = d$ расположена стенка резистивная, внешнее решение для ψ модифицируется и дается выражениями (см. рис. 16.27)

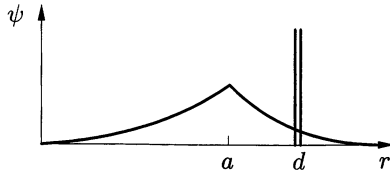


Рис. 16.27. Профиль $\psi(r)$ в случае, когда при $r = d$ находится резистивная стенка

$$\psi(r) = \psi(d)(r/d)^{-m} \quad (r > d),$$

$$\psi(r) = \frac{\psi(d)}{1 - \alpha_{\text{res}}} \left((r/d)^{-m} - \alpha_{\text{res}}(r/d)^m \right) \quad (d > r > a). \quad (16.86)$$

Обозначая ток в стенке и удельное сопротивление стенки как j_w и η_w , имеем следующие соотношения:

$$\nabla^2 \psi = -\mu_0 j_w, \quad j_w = E_z / \eta_w = -\frac{\gamma}{\eta_w} \psi.$$

Разрыв логарифмической производной при $r = d$ составляет

$$\frac{\psi(d_+)' - \psi(d_-)'}{\psi(d)} = -\frac{\mu_0 \int j_w dr}{\psi} = \frac{\mu_0 \gamma / \eta_w \int \psi dr}{\psi} = \frac{\mu_0 \gamma \delta_w}{\eta_w} = \frac{\gamma \tau_w}{d},$$

$$\tau_w \equiv \mu_0 d \delta_w \eta_w,$$

где δ_w — толщина стенки, откуда получаем

$$\frac{\psi(d_-)'}{\psi(d)} = -\frac{m}{d} - \frac{\gamma_{\text{res}} \tau_w}{d}.$$

Таким образом, α_{res} в (16.86) равно

$$\alpha_{\text{res}} = \frac{\gamma_{\text{res}} \tau_w / (2m)}{1 + \gamma_{\text{res}} \tau_w / (2m)}.$$

Для $\psi'(a_+) / \psi(a)$ из (16.84) имеем

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} = \frac{m}{a} \left(1 + \frac{\gamma_{\text{res}}^2 \tau_{\text{A}\theta}^2}{(nq - m)^2} + \frac{2}{(nq - m)} \right).$$

С другой стороны, из (16.86) получается

$$\frac{\psi'(a_+)}{\psi(a)} = -\frac{m}{a} \frac{1 + \alpha_{\text{res}}(a/d)^{2m}}{1 - \alpha_{\text{res}}(a/d)^{2m}}. \quad (16.86')$$

Тогда инкремент моды в резистивной стенке дается выражением

$$\gamma_{\text{res}}^2(d) \tau_{\text{A}\theta}^2 = -2(nq - m) \left(1 + \frac{(nq - m)}{1 - \alpha_{\text{res}}(a/d)^{2m}} \right). \quad (16.87)$$

Поскольку

$$\frac{1}{1 - \alpha_{\text{res}}(a/d)^{2m}} = \frac{1}{1 + R} + \frac{R}{1 + R} \frac{1}{1 - (a/d)^{2m}},$$

$$R = (1 - (a/d)^{2m}) \frac{\gamma_{\text{res}}(d)\tau_w}{2m},$$

то (16.87) сводится к

$$\gamma_{\text{res}}^2(d) = \frac{\gamma_c^2(\infty) + R\gamma_c^2(d)}{1 + R}. \quad (16.88)$$

Рассмотрим случай, когда мода устойчива при наличии проводящей стенки при $r = d$ и неустойчива в отсутствие стенки, т. е. $\gamma_c^2(d) < 0$ и $\gamma_c^2(\infty) > 0$. Тогда для инкремента моды при наличии тонкой резистивной стенки при $r = d$ получаем (в предположении $\gamma_{\text{res}}^2(d) \ll \gamma_c^2(d), \gamma_c^2(\infty)$)

$$R = -\frac{\gamma_c^2(\infty)}{\gamma_c^2(d)}, \quad \gamma_{\text{res}}(d)\tau_w = \frac{2m}{1 - (a/d)^{2m}} \left(-\frac{\gamma_c^2(\infty)}{\gamma_c^2(d)} \right). \quad (16.89)$$

Таким образом, инкремент оказывается порядка обратного резистивного времени стенки. При $d \rightarrow a$ величина $\gamma_{\text{res}}(d)\tau_w \rightarrow -2m(1 + nq - m)/(nq - m)$ остается конечной. Эта неустойчивость называется модой резистивного кожуха (*resistive wall mode*— RWM¹⁾). Когда радиус кожуха d приближается к критической величине d_{cr} , где идеальная МГД мода становится неустойчивой даже при наличии проводящей стенки, $\gamma_c(d_{\text{cr}}) = 0$, инкремент RWM становится бесконечным, как это видно в (16.89), и RWM смыкается с идеальной МГД модой.

При твердотельном вращении плазмы и вращении возмущений в ней без проскальзывания, эффект вращения включается в рассмотрение добавлением доплеровского сдвига

$$\gamma \rightarrow \gamma + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \gamma + i \left(\frac{n}{R} v_z - m\omega\theta \right) = \gamma + \omega_{\text{rot}},$$

в левой части уравнения (16.88), но не в правой части этого уравнения. Рис. 16.28 показывает зависимость инкремента $\gamma_{\text{res}}(d)$ от расположения резистивной стенки d/a при фиксированной частоте вращения в случае $\omega_{\text{rot}}\tau_A = 0,5$, $\tau_A^{-1} \equiv B/(a(\mu_0\rho)^{1/2}) = (B/B_\theta)\tau_{A\theta}^{-1}$, $R/a = 5$, $q_0 = 1,05$, $m = 2$, $n = 1$, $\tau_A/\tau_w = 5 \cdot 10^{-4}$. Когда d/a возрастает выше d_{cr}/a , плазма становится неустойчивой в масштабе идеальных МГД времен. При d/a , приближающейся к единице, происходит рост инкремента из-за фактора ин-

¹⁾ Общепринятой русской аббревиатуры не существует. — Примеч. ред.

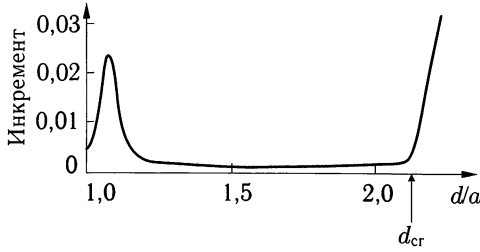


Рис. 16.28. Инкремент $\gamma_{\text{res}}(d)$ как функция положения резистивной стенки d/a в случае $\omega_{\text{rot}} = 0,5$. $\gamma_{\text{res}}(d)$ и ω_{rot} даны в единицах $\tau_A^{-1} = B/(a(\mu_0\rho)^{1/2}) = (B/B_\theta)\tau_{A\theta}^{-1}$, $d_{\text{cr}} = 2,115$, $R/a = 5$, $q_0 = 1,05$, $m = 2$, $n = 1$, $\tau_A/\tau_w = 5 \cdot 10^{-4}$ (согласно [50])

дуктивности $(1 - (a/d)^{2m})$. Вследствие этого эффективное время затухания потока становится меньше, а резистивная стенка ведет себя так, как если бы имела большее сопротивление. Имеет место начальное увеличение инкремента с ростом ω_{rot} , после которого инкремент убывает, но не до нуля, хотя бы и было $\omega_{\text{rot}} \rightarrow \infty$.

Уорд и Бондесон [51] анализировали устойчивость тороидальной плазмы, окруженной резистивной стенкой, с помощью численного кода. Численный анализ обнаруживает наличие двух мод. Одна из них имеет нулевую частоту в системе координат, движущейся вместе с плазмой, а возмущение едва проникает в резистивную стенку, т. е. это «плазменная мода». Другими словами, резистивная стенка ведет себя так, как если бы она была идеальной, когда $\omega_{\text{rot}} \gg \tau_w^{-1}$. Другая мода такова, что возмущение медленно вращается вместе с резистивной стенкой, это RWM. Иначе говоря, возмущение вращается относительно плазмы. Расстояние до стенки противоположным образом влияет на эти две моды. Плазменная мода дестабилизируется при удалении стенки от плазмы, а резистивная мода при этом стабилизируется. Может существовать «окно» в положении стенки такое, что обе моды устойчивы одновременно (см. рис. 16.29). Важными аспектами механизма стабилизации являются инерция, которая становится существенной вблизи резонансных слоев в плазме, где частота вращения превышает локальную альфвеновскую частоту $k_{\parallel}v_A$, и зацепление со звуковыми волнами.

Эти численные результаты могут быть интерпретированы аналитически. Для резистивного кожуха радиуса $r = d$ отношение $\psi'(a_+)/\psi(a)$ дается формулой (16.86'). Величину $\psi'(a_-)/\psi(a)$

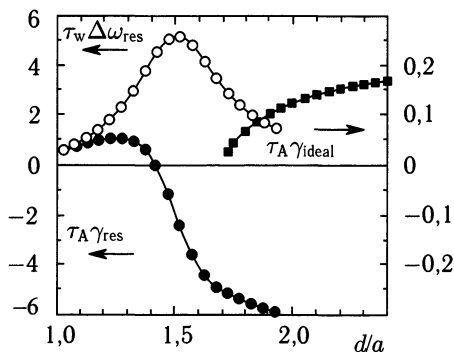


Рис. 16.29. Инкремент γ_{res} и частота проскальзывания $\Delta\omega_{\text{slip}} = \omega_{\text{rot}} - \omega_{\text{res}}$ резистивной моды, инкремент γ_{ideal} плазменной моды как функции положения резистивной стенки d/a для $n = 1$. Частота $\omega_{\text{rot}} = 0,06$ в единицах $\tau_A^{-1} = B/(a(\mu_0\rho)^{1/2}) = (B/B_\theta)\tau_{A\theta}^{-1}$ (согласно [51])

можно формально записать как

$$\frac{\psi'(a_-)}{\psi(a)} = -\frac{m}{a}(1 + Z),$$

величина Z вычисляется при нахождении ψ в используемой модели плазмы. Тогда дисперсионное соотношение принимает вид

$$(1 + Z) = \frac{1 + \alpha_{\text{res}}(a/d)^{2m}}{1 - \alpha_{\text{res}}(a/d)^{2m}} = \frac{(1 + \gamma'_{\text{res}}) + \gamma'_{\text{res}}(a/d)^{2m}}{(1 + \gamma'_{\text{res}}) - \gamma'_{\text{res}}(a/d)^{2m}}, \quad \gamma'_{\text{res}} = \frac{\gamma_{\text{res}}\tau_w}{2m},$$

и для инкремента получаем

$$\frac{\gamma_{\text{res}}\tau_w}{2m} (1 - (a/d)^{2m}) = \frac{Z}{w - Z}, \quad w \equiv \frac{2(a/d)^{2m}}{1 - (a/d)^{2m}} = \frac{2}{(d/a)^{2m} - 1}. \quad (16.90)$$

В отсутствие вращения плазмы Z действительно ($Z = x$), положительно, и RWM неустойчива при $w > x$ или, эквивалентно, при

$$(1 + 2/x) > (d/a)^{2m}, \quad a < d < d_{\text{ideal}} = a(1 + 2/x)^{1/2m}.$$

По мере приближения радиуса стенки к d_{ideal} ($w \rightarrow x$), инкремент γ_{res} стремится к бесконечности, и пристеночная резистивная мода переходит в идеальную МГД неустойчивость, которая имеет место при $d > d_{\text{ideal}}$.

Если плазма вращается, логарифмическая производная имеет ненулевую мнимую часть, $Z = x + yi$, и инкремент будет равен

$$\gamma_{\text{res}}\tau_w 2m (1 - (a/d)^{2m}) = \frac{wx - x^2 - y^2 + iwy}{(w - x)^2 + y^2}. \quad (16.90')$$

При этом нуль в знаменателе в (16.90') устраняется, и инкремент γ_{res} остается конечным и комплексным для всех расстояний. Пристеночная резистивная мода не переходит в идеальную неустойчивость. При $wx < (x^2 + y^2)$ пристеночная резистивная мода становится устойчивой. Это условие можно записать в виде

$$d > d_{\text{res}}, \quad d_{\text{res}} \equiv (1 + 2x/(x^2 + y^2))^{1/2m}.$$

Эти результаты согласуются с численными расчетами.

16.10b. Стабилизация обратной связью

Стабилизация пристеночной резистивной моды с помощью обратной связи обсуждалась в [52]. Мы начнем с уравнения для собственных мод, используемого при изучении устойчивости токамака с большим аспектным отношением и низким бета [53],

$$\frac{d}{dr} \left((\gamma\tau_A^2 + F^2)r \frac{d}{dr} (r\xi_r) \right) - \left(m^2(\gamma\tau_A^2 + F^2) + r \frac{dF^2}{dr} \right) \xi_r = 0, \quad (16.91)$$

$$F = \left(-\frac{m}{r}B_\theta + \frac{n}{R}B_z \right) = \frac{B_\theta}{r}(nq - m).$$

Это уравнение может быть получено из (14.36) в предположении $\epsilon = r/R \ll 1$. В вакууме возмущение магнитного поля $\mathbf{B}_1 = \nabla\phi$ — решение уравнения $\nabla^2\phi = 0$:

$$\phi = A \left((r/b_w)^{-m} + \alpha_w(r/b_w)^m \right) \exp(-im\theta + nz/R). \quad (16.92)$$

Граничное условие на границе плазма—вакуум на краю плазмы при $r = a$ [53]

$$(\gamma^2\tau^2 + f^2) \frac{1}{\xi_r} \frac{d(r\xi_r)}{dr} = f^2 \left(\frac{a\psi'(a_+)}{\psi(a)} - \frac{2m}{f} \right), \quad (16.93)$$

где $f = nq - m$, а ψ — потоковая функция внешнего возмущения $\mathbf{B}_{1\text{ex}}$. В вакууме потоковая функция $\psi = \psi(r) \exp(-im\theta)$ (z -компонента векторного потенциала A_z) связана с радиальной компонентой возмущения магнитного поля: $\psi = -rB_{1r}/m$. Формула (16.93) может быть выведена из граничного условия (8.33) и (8.38) на границе плазма—вакуум. Граничное условие (8.38) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_{1\text{ex}} = \mathbf{n} \cdot \nabla \times (\xi \times \mathbf{B})$ принимает вид $\partial\phi/\partial r = = r^{-1} \partial(\xi_r B_\theta / \partial\theta + \partial(\xi_r B_z) / \partial z$ и определяет A в (16.92):

$$A = -i \frac{\xi_r F}{(m/a) \left((a/b_w)^{-m} - \alpha_w (a/b_w)^m \right)}.$$

Константу α_w следует найти из граничного условия на стенке при $r = b_w$. Граничное условие (8.33) принимает вид

$$B_\theta B_{1\theta\text{in}} + B_z B_{1z\text{in}} = B_\theta B_{1\theta\text{ex}} + B_z B_{1z\text{ex}},$$

где $\mathbf{V}_{1\text{in}} = \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{V})$ дано в (8.69)–(8.71), а $\mathbf{V}_{1\text{ex}}$ в (16.92). Смещение $\boldsymbol{\xi}$ дается уравнениями Хэйна–Люста (8.114)–(8.116), в которых предполагается малость β и несжимаемость. Два граничных условия приводят к (16.93).

Граничное условие (16.93) используется для получения уравнения цепи для плазмы (при определении $\beta_0 \equiv (1/\xi_r)(d(r\xi_r)/dr)|_a$). В принципе, β_0 определяется из уравнений (16.91) и (16.93) самосогласованно. Поточковая функция $2\pi R\psi(a_+)$ есть возмущение полоидального потока моды (m, n) в вакуумной области ($B_{1\theta} = -(\partial\psi/\partial r)$). Величина $2\pi R\psi(a_+)$ состоит из вкладов от тока возмущения I_1 , тока в резистивной стенке I_2 и тока в цепи I_3 , соответствующего току в катушках обратной связи для моды (m, n) , т. е.

$$2\pi R\psi(a_+) = L_1 I_1 + M_{12} I_2 + M_{13} I_3,$$

$$2\pi R\psi'(a_+) = L'_1 I_1 + M'_{12} I_2 + M'_{13} I_3.$$

В результате уравнение (16.93) сводится к

$$\begin{aligned} & \left((\gamma^2 \tau^2 + f^2) \beta_0 - f^2 \frac{aL'_1}{L_1} + 2m \right) L_1 I_1 + \\ & + \left((\gamma^2 \tau^2 + f^2) \beta_0 - f^2 \frac{aM'_{12}}{M_{12}} + 2m \right) M_{12} I_2 + \\ & + \left((\gamma^2 \tau^2 + f^2) \beta_0 - f^2 \frac{aM'_{13}}{M_{13}} + 2m \right) M_{13} I_3 = 0. \end{aligned}$$

Для цепи, соответствующей присутствию резистивной стенки, поточковая функция на этой стенке при $(r = r_w)$ удовлетворяет соотношениям

$$2\pi R \frac{\partial\psi(r_w)}{\partial t} = L_2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + M_{21} \frac{\partial I_1}{\partial t} + M_{23} \frac{\partial I_3}{\partial t}$$

и

$$2\pi R \frac{\partial\psi(r_w)}{\partial t} = -2\pi R \eta_w j_w = -R_2 I_2,$$

где

$$I_2 \equiv 2\pi r_w \delta_w j_w / (2m), \quad R_2 \equiv 2m \frac{\eta_w 2\pi R}{2\pi r_w \delta_w}.$$

Для цепи, соответствующей активному контролю обратной связи, следует добавить член с напряжением, необходимым для возбуждения тока обратной связи, так что

$$M_{31} \frac{\partial I_1}{\partial t} + M_{32} \frac{\partial I_2}{\partial t} + M_{33} \frac{\partial I_3}{\partial t} + R_3 I_3 = V_3.$$

Для минимизации $\psi(a_+)$ следует прикладывать напряжение обратной связи V_3 вполне определенной формы, используя подходящие датчики для измерения возмущений.

§ 16.11. Параметры токамака—реактора

Хотя токамак характеризуется множеством параметров, между ними существует много соотношений и ограничений [54]. Если радиус плазмы a , тороидальное поле B_t и отношение Q выходной термоядерной мощности к мощности дополнительного нагрева оговорены (заданы), то остальные параметры токамака определяются при использовании скейлингов для плотности электронов, бета, времени удержания энергии и условия зажигания. Цилиндрический коэффициент запаса устойчивости q_1 (или эффективный коэффициент запаса устойчивости на границе плазмы q_{eff} , как определяется ниже), эллиптичность κ_s и треугольность δ сечения плазмы считаются заданными. По определению q_1 , имеем

$$q_1 \equiv \frac{Ka B_t}{R B_p} = \frac{5K^2 a B_t}{A I_p}, \quad B_p = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi K a} = \frac{I_p}{5Ka},$$

ток в плазме

$$I_p = \frac{5K^2 a B_t}{A q_1},$$

где $K^2 = (1 + \kappa_s^2)/2$ (I_p в МА, B_t в Т и a в м). Аспектное отношение $A = R/a$ как функция a и B_t будет дано ниже (см. 16.99'). Эффективный коэффициент запаса устойчивости на границе плазмы q_{eff} приближенно равен [16]

$$q_{\text{eff}} = q_1 f_{As}(A),$$

$$f_{As}(A) \approx \left(1 + \frac{1 + \bar{A}^2/2}{A^2} \right) (1,24 - 0,54\kappa_s + 0,3(\kappa_s^2 + \delta^2) + 0,13\delta),$$

где $\bar{L} = \beta_p + l_i/2$. Усредненная по объему плотность электронов n_{20} в единицах 10^{20} м^{-3} дается формулой

$$n_{20} = N_G \frac{I_p}{\pi a^2}, \quad (16.94)$$

где N_G — безразмерная плотность Гринвальда. Величина бета

$$\beta_{\text{th}} \equiv \frac{\langle p \rangle}{B_t^2/2\mu_0} = 0,0403(1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_I) \frac{\langle n_{20} T \rangle}{B_t^2}$$

выражается как

$$\beta_{\text{th}} = 0,01\beta_N \frac{I_p}{aB_t}, \quad (16.95)$$

где β_N — бета нормализованное, f_{DT} , f_{He} и f_I обозначают отношения плотностей топлива DT, He и примесей к плотности электронов, T измеряется в кэВ. $\langle X \rangle$ означает усреднение по объему X . Тепловая энергия плазмы W равна

$$W = \frac{3}{2}\beta_{\text{th}} \frac{B_t^2}{2\mu_0} V = 0,5968\beta_{\text{th}} B_t^2 V,$$

где W измеряется в МДж, а объем плазмы V — в м^3 . Форма сечения плазмы с вытянутостью κ_s и треугольностью δ описывается формулами

$$R = R_0 + a \cos(\theta + \delta \sin \theta), \\ z = a\kappa_s \sin \theta.$$

Объем плазмы V при этом равен

$$V \approx 2\pi^2 a^2 R \kappa_s f_{\text{shape}},$$

где f_{shape} — коррекция на треугольность

$$f_{\text{shape}} = 1 - \frac{\delta}{8} + \frac{\delta^4}{192} - \frac{a}{4R} \left(\delta - \frac{\delta^3}{3} \right).$$

Используем скейлинг удержания IPB98y2 [34]:

$$\tau_E = 0,0562 \cdot 10^{0,41} H_{y2} I^{0,93} B_t^{0,15} M^{0,19} n_{20}^{0,41} a^{1,97} A^{1,39} \kappa_s^{0,78} P^{-0,69}, \quad (16.96)$$

где $M (= 2,5)$ — среднее массовое число иона, а P — потеря мощности (в МВт) вследствие переносов, равная необходимой поглощаемой мощности нагрева за вычетом потерь на излучение P_{rad} . Полная мощность, выделяемая в α -частицах,

$$P_\alpha = \frac{Q}{4} \langle n_{\text{DT}}^2 \langle \sigma v \rangle_v \rangle V,$$

где $Q_\alpha = 3,515$ МэВ. Зависимость $\langle \sigma v \rangle_v$ от T описывается формулой (1.5). Поскольку скорость термоядерной реакции σv вблизи $T = 10$ кэВ аппроксимируется как

$$\langle \sigma v \rangle_v \approx 1,1 \cdot 10^{-24} T_{\text{кэВ}}^2 (\text{м}^3/\text{с}),$$

введем отношение

$$\Theta(\langle T \rangle) \equiv \frac{\langle n_{\text{DT}}^2 \langle \sigma v \rangle_v \rangle}{1,1 \cdot 10^{-24} \langle n_{\text{DT}}^2 T^2 \rangle}.$$

Θ есть функция средней температуры $\langle T \rangle$ в кэВ, она зависит от профилей плотности и температуры и имеет максимум около единицы вблизи $\langle T \rangle \approx 8-10$ кэВ. Величина Θ как функция $\langle T \rangle$ для $n(\rho) = \langle n \rangle (1 - \rho^2)^{\alpha_n} / (1 + \alpha_n)$, $T(\rho) = \langle T \rangle (1 - \rho^2)^{\alpha_T} / (1 + \alpha_T)$ показана на рис. 16.30 [55]. P_α сводится к

$$P_\alpha = 0,9551 \frac{f_{\text{prof}} f_{\text{DT}}^2}{(1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_i)^2} \beta_{\text{th}}^2 B_t^4 \Theta V, \quad (16.97)$$

где $f_{\text{prof}} \equiv \langle n^2 T^2 \rangle / \langle n T \rangle^2 \approx (\alpha_n + \alpha_T + 1)^2 / (2\alpha_n + 2\alpha_T + 1)$ описывает влияние профилей температуры и плотности. Если обозначить поглощенную мощность дополнительного нагрева как $P_{\text{аух}}$ и эффективность нагрева α -частиц как f_α , то полная мощность нагрева равна $f_\alpha P_\alpha + P_{\text{аух}}$. Когда доля потерь на излучение в общей мощности нагрева составляет f_R , мощность, необходи-

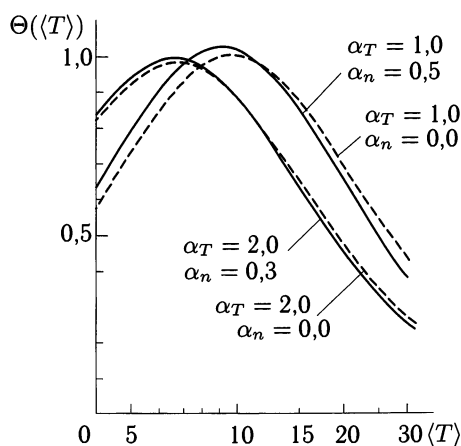


Рис. 16.30. Θ как функция средней температуры $\langle T \rangle$ для профилей с параметрами $(\alpha_T = 1,0, \alpha_n = 0,0)$, $(\alpha_T = 2,0, \alpha_n = 0,0)$, $(\alpha_T = 1,0, \alpha_n = 0,5)$ и $(\alpha_T = 2,0, \alpha_n = 0,3)$

мая для поддержания горения, дается выражением

$$P = (1 - f_R)(f_\alpha P_\alpha + P_{\text{aux}}).$$

Введем отношение Q полной термоядерной мощности на выходе, $P_n + P_\alpha = 5P_\alpha$ (P_n — мощность, выходящая в нейтронах), к поглощенной мощности дополнительного нагрева P_{aux} ,

$$Q = \frac{5P_\alpha}{P_{\text{aux}}}.$$

Тогда P представляется как

$$P = (1 - f_R) \left(1 + \frac{5}{Q}\right) P_\alpha.$$

При этом условие зажигания имеет вид

$$\frac{W}{T_E} = (1 - f_R) \left(f_\alpha + \frac{5}{Q}\right) P_\alpha, \quad (16.98)$$

и (16.96) сводится к [55]

$$a = 3,22 f_{\text{shape}}^{1,64} \left(\frac{(1 + f_{\text{DT}} + f_{\text{He}} + f_I)^2}{(1 - f_R)(f_\alpha + 5/Q) f_{\text{prof}} f_{\text{DT}}^2 \Theta} \right)^{0,738} \times \\ \times \frac{\beta_N^{0,905} (q_{\text{eff}}/f_{\text{As}}(A))^{2,29} A^{0,619}}{H_{y2}^{2,36} N_G^{0,976} \kappa_s^{0,214} K^{4,57} B_t^{1,74}}. \quad (16.99)$$

Следовательно, аспектное отношение A должно быть

$$A = c^{1,616} a^{1,616} B_t^{2,81}, \quad (16.99')$$

где для коэффициента перед $A^{0,619}/B_t^{1,74}$ в (16.99) введено обозначение c^{-1} .

Таблица 16.3.a

Параметры, заданные в проекте. Величина β_N — бета нормализованное без учета вклада энергичных ионов

a	B_t	A	q_{eff}	κ_s	δ	f_R	f_α	β_N	N_G	f_{DT}	f_{He}	f_I	H_{y2}	α_T	α_n
2,0	5,3	3,1	3,38	1,7	0,35	0,3	0,95	1,63	0,85	0,82	0,04	0,02	1,0	1,0	0,1

Таблица 16.3.b

Вычисляемые параметры

Q	R	I_p	T_E	n_{20}	$\langle T \rangle$	P_n	P_α	P_{aux}	P_{rad}	q_1	Θ
10,2	6,2	15,0	3,8	1,01	8,1	324	81	40	35	2,22	0,99

Таблица 16.4

Параметры ITER-FEAT. τ_E^{tr} — время удержания энергии с поправкой на потери на излучение. $Q = 10$. κ_s — отношение вертикального радиуса к горизонтальному. q_{95} — коэффициент запаса устойчивости на магнитной поверхности, охватывающей 95% потока. Максимальное поле в катушках тороидального поля $B_{\text{max}} = 11,8$ Т. Число катушек тороидального поля равно 18. Рассматривается диверторная конфигурация с одним нулем. Напряжение обхода $V_{\text{loop}} = 89$ мВ. Длительность индукционного импульса с плоской вершиной (flat-top) при условии $Q = 10$ составляет несколько сотен секунд. P_{fus} — полная выходная термоядерная мощность. N_G определяется формулой (16.7). f_R — доля потерь на излучение, а f_{DT} , f_{Be} , f_{He} , f_{Ar} — отношения плотностей DT, Be, He, Ar к плотности электронов

I_p	15 МА	Z_{eff}	1,65
B_t	5,3 Т	f_{DT}	$\approx 82\%$
R	6,2 м	f_{He}	4,1%
a	2,0 м	f_{Be}	2%
R/a	3,1	f_{Ar}	0,12%
κ_s	1,7	f_R	0,39
$\langle n_e \rangle$	$1,01 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$	β_t	2,5%
$\langle 0,5 \cdot (T_e + T_i) \rangle$	8,5 кэВ	β_p	0,67
W_{thermal}	325 МДж	β_N (нормал. бета)	1,77
W_{fast}	25 МДж	N_G	0,85
τ_E^{tr}	3,7 с	$H_{y2} = \tau_E^{\text{tr}} / \tau_E^{\text{IPB98y2}}$	1,0
$P_{\text{fus}}(P_\alpha)$	410 МВт (82 МВт)	q_{95}	3,0
P_{aux}	41 МВт	q_1	2,22
P_{rad}	48 МВт	l_i	0,86

Поскольку поле в сверхпроводящей катушке не может превышать некоторого максимума B_{mx} , то при расстоянии Δ между сепаратрисой и проводником катушки тороидального поля (см. рис. 16.31) существует ограничение на тороидальное поле

$$\frac{B_t}{B_{\text{mx}}} = \frac{R - a - \Delta}{R} = 1 - \left(1 + \frac{\Delta}{a}\right) \frac{1}{A},$$

$$1 - \frac{2}{A} < \frac{B_t}{B_{\text{mx}}} < 1 - \frac{1}{A},$$

где считается $a > \Delta > 0$. При задании Δ и B_{mx} величина B_t оказывается функцией a .

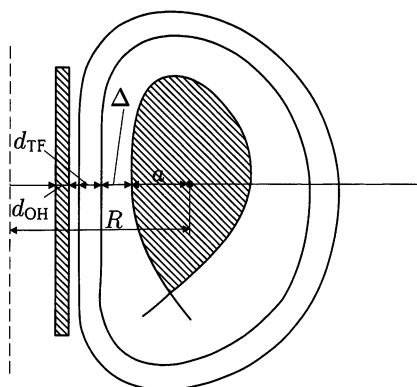


Рис. 16.31. Геометрия плазмы, катушек тороидального поля и центрального соленоида трансформатора тока в токамаке

Отношение ξ потоков катушки омического нагрева, $\Delta\Phi$, и плазменного кольца, $L_p I_p$, равно

$$\xi \equiv \frac{\Delta\Phi}{L_p I_p} = \frac{5B_{\text{mx}}((R_{\text{OH}} + d_{\text{OH}})^2 + 0,5d_{\text{OH}}^2)}{(\ln(8A/\kappa_s^{1/2}) + l_i - 2)R I_p},$$

где $R_{\text{OH}} = R = (a + \Delta + d_{\text{TF}}) + d_s + d_{\text{OH}}$, d_{TF} и d_{OH} — толщины проводников в катушке тороидального поля и катушке омического нагрева, а d_s — расстояние между этими катушками (см. рис. 16.31). Средние плотности тока j_{TF} , j_{OH} в катушках тороидального поля и индуктора в единицах $\text{МА}/\text{мм}^2 = \text{А}/\text{мм}^2$ составляют

$$j_{\text{TF}} = \frac{2,5 B_{\text{mx}}}{\pi d_{\text{TF}}} \frac{1}{1 - 0,5d_{\text{TF}}/(R - a - \Delta)},$$

$$j_{\text{OH}} = \frac{2,5 B_{\text{mx}}}{\pi d_{\text{OH}}}.$$

Если вместо a , B_t , Q задаются параметры a , B_t , A , то величина Q и другие параметры могут быть оценены (они приводятся в табл. 16.3.)

Концептуальная разработка токамака—реактора активно развивалась вместе с развитием экспериментальных исследований на токамаках. Примерами международной деятельности в этом направлении являются проекты INTOR (International Tokamak Reactor) [56] и ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) [57, 58]. ITER предназначен [58] для демонстрации возможности зажигания в индукционно создаваемой плазме с $Q \approx 10$ и для демонстрации непрерывно работающего токамака при использовании неиндукционно создаваемой плазмы с $Q \approx 5$.

Основные параметры ITER на 2000 год приведены в табл. 16.4. Сечение ITER-FEAT-2000 показано на рис. 16.32.

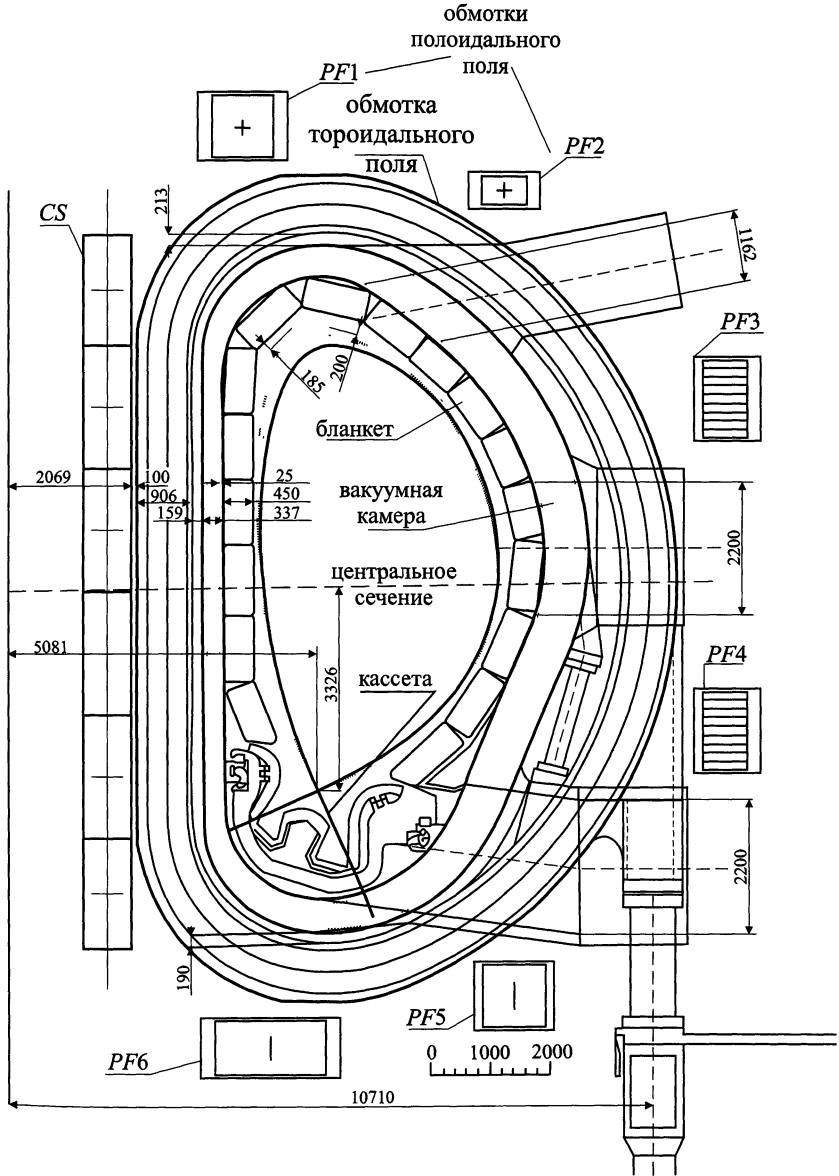


Рис. 16.32. Торoidalное сечение токамака ITER-FEAT согласно проекту 2000 г.

Список литературы

1. *Artsimovich L.A.* Nucl. Fusion. 1972. V. 12. P. 215; *Furth H.P.* Nucl. Fusion. 1975. V. 15. P. 487.
2. *Wesson J.* Tokamaks. — Oxford: Clarendon Press, 1997; ITER Physics Basis: Nucl. Fusion. 1999. V. 39. No.12. P. 2138–2638.
3. *Mukhovatov V.S., Shafranov V.D.* Nucl. Fusion. 1971. V. 11. P. 605.
4. Equip TFR: Nucl. Fusion. 1978. V. 18. P. 647.
5. *Sheffield J.* Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation. N. Y.: Academic Press, 1975.
6. См. например *Nagayama Y., Ohki Y., Miyamoto K.* Nucl. Fusion. 1983. V. 23. P. 1447.
7. *Troyon F., Gruber R., Saurenmann H. et al.* Plasma Phys. and Controlled Fusion. 1984. V. 26. P. 209.
8. *Sykes A., Turner M.F., Patel S.* Proc. 11th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Aachen. Part II. 1983. P. 363; *Tuda T., Azumi M., Itoh K. et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, London, 1984). IAEA, Vienna. 1985. V. 2. P. 173.
9. *Кадомцев Б.Б.* Физика плазмы. 1975. V. 1. P. 710.
10. *Greenwald M., Terry J.L., Wolfe S.M. et al.* Nucl. Fusion. 1988. V. 28. P. 2199.
11. ASDEX-U Team: IAEA Fusion Energy Conference, O1-5 (Montreal, 1990), IAEA, Vienna.
12. *Wesson J.A.* Nucl. Fusion. 1978. V. 18. P. 87.
13. *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* Nucl. Fusion. 1971. V. 11. P. 67.
14. *Connor J.W., Wilson H.R.* Plasma Phys. Control. Fusion. 1994. V. 36. P. 719.
15. *Wagner F., Stroth U.* Plasma Phys. Control. Fusion. 1993. V. 35. P. 1321.
16. *Todd T.N.* Proceedings of 2nd Eur. Workshop, Sault-Les-Chartreux, 1983. European Physical Society, Geneva, 1983. P. 189; *Kamada Y., Ushigusa K., Naito O. et al.* Nucl. Fusion. 1994. V. 34. P. 1605.
17. DIII-D team: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research Conference Proceedings (Washington D. C. 1990). IAEA, Vienna. 1991. V. 1. P. 69.
18. *Borrass K.* Nucl. Fusion. 1991. V. 31. P. 1035; *Borrass K., Faren-go R., Vlases G.C.* Nucl. Fusion. 1996. V. 36. P. 1389; *LaBombard B., Goetz J.A., Hutchinson I. et al.* Nucl. Materials. 1997. V. 241–243. P. 149.
19. *Goldston R.J.* Plasma Physics and Controlled Fusion. 1984. V. 26. P. 87; *Kaye S.M.* Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 2327.
20. *Yushmanov P.N., Takizuka T., Riedel K.S. et al.* Nucl. Fusion. 1990. V. 30. P. 1999; *Uckan N.A., Yushmanov P.N., Takizuka T. et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference

- Proceedings, Washington D. C., 1990). IAEA, Vienna. 1991. V. 3. P. 307.
21. *Wagner F., Becker G., Behringer K. et al.* Phys. Rev. Lett. 1982. V. 49. P. 1408; *Wagner F., Becker G., Behringer K. et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Baltimore, 1982). IAEA, Vienna. 1983. V. 1. P. 43.
 22. ASDEX Team: Nucl. Fusion. 1989. V. 29. P. 1959.
 23. *Groebner R.J.* Phys. Fluids. 1993. V. B5. P. 2343.
 24. *Doyle E.J., Rettig C.L., Burrell K.H. et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Würzburg, 1992). IAEA, Vienna. 1992. V. 1. P. 235.
 25. *Itoh S.I., Itoh K.* Phys. Rev. Lett. 1988. V. 63. P. 2369.
 26. *Shaing K.C., Crume E.C.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 2369.
 27. *Bigrali H., Diamond D.H., Kim Y.-B. et al.* Plasma Physics Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Washington D. C., 1990). IAEA, Vienna. 1991. V. 2. P. 191.
 28. *Dupree T.H.* Phys. Fluids. 1972. V. 15. P. 334; *Boutros-Ghali T., Dupree T.H.* Phys. Fluids. 1981. V. 24. P. 1839.
 29. TFTR Team: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Seville, 1994). IAEA, Vienna. 1995. V. 1. P. 11; *Ibid.* (Conference Proceedings, Washington D. C., 1990). IAEA, Vienna. 1991. V. 1. P. 9.
 30. *Taylor T.S., Osborne T.H., Burrell K.H. et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Würzburg, 1992). IAEA, Vienna. 1992. V. 1. P. 167.
 31. JT60U Team: *ibid.* (Conference Proceedings, Seville, 1994). IAEA, Vienna. 1995. V. 1. P. 31.
 32. *Hinton F.L., Staebner G.M.* Phys. Fluids. 1993. V. B5. P. 1281.
 33. IAEA Fusion Energy Conference (Montreal, 1996). IAEA, Vienna (1997). O1-6, O1-2, O1-3, A5-5, O2-2.
 34. ITER Physics Basis. Ch. 2. In Nucl. Fusion. 1992. V. 39. No. 12.
 35. JET Team: Nucl. Fusion. 1992. V. 32. P. 187.
 36. *Ohkawa T.* Nucl. Fusion. 1970. V. 10. P. 185.
 37. *Wort D.J.H.* Plasma Phys. 1971. V. 13. P. 258.
 38. *Fisch N.J.* Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 873; *Karney C.F.F., Fisch N.J.* Phys. Fluids. 1979. V. 22. P. 1817.
 39. *Сивухин Д.В.* Вопросы теории плазмы. Вып. 4. Под ред. *Леонтовича М.А.* М.: Атомиздат, 1964. С. 81.
 40. *Fisch N.J., Boozer A.H.* Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 720.
 41. *Start D.F.H., Cordey J.G., Jones E.M.* Plasma Phys. 1980. V. 22. P. 303.
 42. *Bickerton R.J., Connor J.W., Taylor J.B.* Nature Physical Science. 1971. V. 229. P. 110.
 43. *Галеев А.А.* ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 1378.

44. *Rosenbluth M.N., Hazeltine R.D., Hinton F.L.* Phys. Fluids. 1972. V. 15. P. 116.
45. *Sigmar D.J.* Nucl. Fusion. 1973. V. 13. P. 17.
46. *Ozeki T., Azumi M., Tokuda S., Ishida S.* Nucl. Fusion. 1993. V. 33. P. 1025.
47. *Rutherford P.H.* Phys. Fluids. 1973. V. 16. P. 1903.
48. *Fitzpatrick R.* Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 825.
49. *Gates D.A., Lloyd B., Morris A.W. et al.* Nucl. Fusion. 1997. V. 37. P. 1593.
50. *Finn J.M.* Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 198.
51. *Ward D.J., Bondeson A.* Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 1570.
52. *Okabayashi M., Pomphrey N., Hatcher R.E.* Nucl. Fusion. 1998. V. 38. P. 1607.
53. *Wesson J.A.* Nucl. Fusion. 1978. V. 18. P. 87.
54. ITER Team: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conf. Proceedings, Washington D. C., 1990). IAEA, Vienna. 1991. V. 3. P. 413.
55. *Miyamoto K.* Jour. Plasma Fusion Research. 2000. V. 76. P. 166.
56. INTOR Team: Nucl Fusion. 1983. V. 23. P. 1513.
57. ITER Team: 16th IAEA Fusion Energy Conference (Montreal, 1996). IAEA, Vienna. 1997. O1-1, F1-F5.
58. ITER Team: 18th IAEA Fusion Energy Conference (Sorrento, 2000). OV/1, ITER/1-6; ITER Team: Technical Basis for the ITER-FEAT Outline Design, Dec. 1999.

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УДЕРЖАНИЯ

§ 17.1. Пинч с обращенным полем

17.1а. Конфигурация пинча с обращенным полем

Пинч с обращенным полем (Reversed Field Pinch— RFP), как и токамак, имеет осесимметричное тороидальное поле. Конфигурация магнитного поля образуется полоидальным полем B_p , создаваемым тороидальной компонентой плазменного тока, и тороидальным полем B_t , создаваемым внешним тороидальным полем катушки и полоидальной компонентой плазменного тока. Потери, связанные с формой орбит частиц, так же малы, как и в токамаке. Однако RFP и токамаки имеют совершенно различные характеристики. В RFP величины полоидального поля B_p и тороидального поля B_t сравнимы, и запас устойчивости

$$q_s(r) = \frac{r B_z(r)}{R B_\theta(r)}$$

много меньше единицы ($q_s(0) \sim a/(R\Theta)$, $\Theta \sim 1,6$). Радиальный профиль тороидального поля показан на рис. 17.1 на с. 346. Направление граничного тороидального поля обращено по отношению к направлению поля на оси, и магнитный шир велик. Благодаря этому, может быть МГД устойчиво удержана плазма с большой бета ($\langle \beta \rangle = 10 - 20\%$). Поскольку плазменный ток может быть больше, чем по пределу Крускала—Шафранова ($q < 1$), имеется возможность достижения зажигания, при использовании только омического нагрева (хотя это зависит от скейлинга удержания).

RFP появились на ранней фазе термоядерных исследований. Устойчивая спокойная фаза разряда была обнаружена на установке ZETA в Харуэлле в 1968 г. [1] Конфигурация магнитного поля в спокойной фазе оказалась конфигурацией пинча с обращенным полем, показанной на рис. 17.1. Электронная темпера-

тура, энергетическое время удержания и средняя бета плазмы в ZETA на момент конференции МАГАТЭ в Новосибирске составляли $\kappa T_e = 100 - 150$ эВ, $\tau_E = 2$ мс, $\langle \beta \rangle \approx 10\%$. Однако на той же конференции были также представлены эпохальные результаты токамака Т-3 ($\kappa T_e = 1$ кэВ, τ_E — несколько мс, $\beta \approx 0,2\%$), и ZETA была закрыта из-за лучших характеристик удержания в токамаках. С другой стороны, поскольку RFP могут удерживать плазму с большой бета, они продолжали интенсивно исследоваться с целью улучшения характеристик удержания (ZT-40 М, ОНТЕ, НВТХ1-В, ТРЕ-1RM 20, MST и RFX, ТРЕ-RX) [2–5]. Важными проблемами для RFP являются скейлинг удержания и контроль примесей в высокотемпературной области.

17.1b. МГД релаксация

В экспериментах на RFP показано, что, даже если вначале (на стадии формирования) плазма МГД неустойчива, то вне зависимости от начальных условий впоследствии образуется устойчивая конфигурация RFP. В 1974 г. Тейлор отметил, что конфигурация RFP является состоянием с минимальной энергией, устанавливающимся при определенных условиях в результате релаксационного процесса [6].

Для изучения этого предмета введем физическую величину, называемую *магнитная спиральность*. Используем скалярный и векторный потенциалы ϕ , \mathbf{A} электромагнитного поля. Магнитная спиральность K определяется как интеграл от скалярного произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ по объему V , ограниченному магнитной поверхностью,

$$K = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dr, \quad (17.1)$$

где $dr \equiv dx dy dz$. Поскольку

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

из уравнений Максвелла находим, что [7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (-\mathbf{E} - \nabla\phi) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \\ &= -\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\phi \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \\ &= -\nabla \cdot (\phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) - 2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Если плазма окружена сверхпроводящей стенкой, то выполняются условия $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ (\mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к стенке), и мы получаем

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} dr = -2 \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{V} dr. \quad (17.2)$$

Член в правой части (17.2) отвечает за потерю магнитной спиральности. Если применить закон Ома

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j},$$

то этот член сведется к

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -2 \int_V \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{V} dr. \quad (17.3)$$

Если $\eta = 0$, магнитная спиральность сохраняется. Другими словами, если плазма сверхпроводящая, то интеграл K по объему, ограниченному произвольной замкнутой магнитной поверхностью, постоянен. Однако если имеется малая резистивность плазмы, то возможны локальные перезамыкания силовых линий магнитного поля, плазма может релаксировать к более устойчивому состоянию, и магнитная спиральность может локально изменяться. Тейлор постулировал, что глобальная магнитная спиральность K_T , полученная интегрированием спиральности по всему объему плазмы, изменяется существенно медленнее. Предполагается, что K_T постоянна на временной шкале релаксационных процессов:

$$\delta K_T = \int \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{A} dr + \int \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{A} dr = 2 \int \mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{A} dr = 0.$$

Вариация энергии магнитного поля

$$(2\mu_0)^{-1} \delta \int (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}) dr = \mu_0^{-1} \int \mathbf{V} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{A} dr = \mu_0^{-1} \int (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \delta \mathbf{A} dr$$

при условии инвариантности K_T с использованием метода неопределенных множителей дает

$$\nabla \times \mathbf{V} - \lambda \mathbf{V} = 0. \quad (17.4)$$

Это решение соответствует состоянию с минимальной энергией в бессиловой плазме (плазме без давления) $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p = 0$, $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$. Осесимметричное решение в цилиндрических координатах имеет вид

$$B_r = 0, \quad B_\theta = B_0 J_1(\lambda r), \quad B_z = B_0 J_0(\lambda r) \quad (17.5)$$

и называется *моделью бesselевых функций*. Профили $B_\theta(r)$ и $B_z(r)$ показаны на рис. 17.1, а. В области $\lambda r > 2,405$ тороидальное поле обращается. Магнитное поле RFP характеризуют обычно параметром пинча Θ и параметром обращения F :

$$\Theta = \frac{B_\theta(a)}{\langle B_z \rangle} = \frac{(\mu_0/2)I_p a}{\int B_z 2\pi r dr}, \quad F = \frac{B_z(a)}{\langle B_z \rangle}, \quad (17.6)$$

где $\langle B_z \rangle$ — усредненное по объему тороидальное поле. Выражения для F и Θ в модели бesselевых функций имеют вид

$$\Theta = \frac{\lambda a}{2}, \quad F = \frac{\Theta J_0(2\Theta)}{J_1(2\Theta)}. \quad (17.6')$$

Зависимость F – Θ показана на рис. 17.1, б. В модели Тейлора

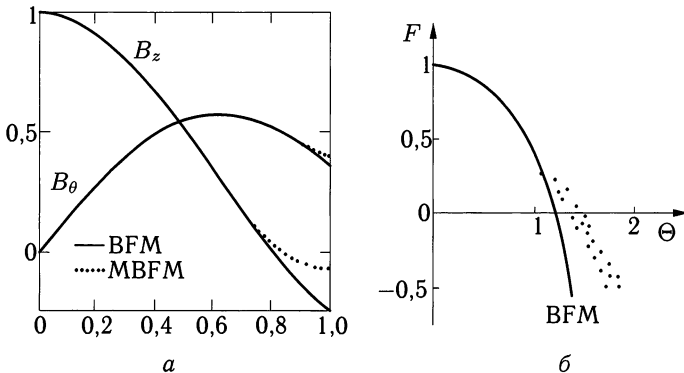


Рис. 17.1. а — тороидальное поле $B_z(r)$ и полоидальное поле $B_\theta(r)$ в RFP. Показаны радиальные профили для модели бesselевых функций и модифицированной модели бesselевых функций; б — линия F – Θ

значение λ постоянно:

$$\lambda = \frac{\mu_0 \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}}{B^2} = \text{const.}$$

Наблюдаемые в экспериментах с RFP поля отличаются от модели бesselевых функций из-за эффекта конечной беты и из-за несовершенства релаксированного состояния. Значение λ не постоянно во внешней области плазмы и стремится к нулю на границе. Решение $\nabla \times \mathbf{B} - \lambda \mathbf{B} = 0$ с $\lambda(r)$ называется модифицированной моделью бesselевых функций.

Условие устойчивости для локальных МГД мод имеет вид [8]

$$\frac{1}{4} \left(\frac{q'_s}{q_s} \right)^2 + \frac{2\mu_0 p'}{r B_z^2} (1 - q_s^2) > 0. \quad (17.7)$$

Эта формула показывает, что сильный шир может стабилизировать плазму в области $p'(r) < 0$, но в центральной области с малым широм предпочтителен плоский профиль давления $p'(r) \sim 0$. Если $q_s^2 < 1$, локальные МГД моды неустойчивы около $q_s' = 0$ (нуля шири).

Если принять во внимание эффект конечной резистивности, то можно ожидать при классических процессах магнитной диссипации, что RFP-конфигурация может поддерживаться только в течение времени $\tau_{cl} = \mu_0 \sigma a^2$, где σ — характерное значение проводимости. Однако эксперименты на ZT-40M [9] показали, что разряд в RFP поддерживается в три раза дольше (~ 20 мс), чем τ_{cl} . Это ясно указывает на то, что при релаксационных процессах существует процесс регенерации тороидального потока, которого нет при классической магнитной диссипации. Таким образом, конфигурация пинча с обращенным полем поддерживается до тех пор, пока поддерживается плазменный ток.

Если в плазме есть флуктуации, например магнитного поля \mathbf{B} , то оно может быть представлено в виде суммы $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle_t + \tilde{\mathbf{B}}$ усредненного во времени $\langle \mathbf{B} \rangle_t$ и флуктуирующего $\tilde{\mathbf{B}}$ полей. Усредненный по времени закон Ома $\eta \mathbf{j} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ сводится к

$$\langle \eta \mathbf{j} \rangle_t = \langle \mathbf{E} \rangle_t + \langle \mathbf{v} \rangle_t \times \langle \mathbf{B} \rangle_t + \langle \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}} \rangle_t, \quad (17.8)$$

где $\langle \dots \rangle_t$ отмечает временное усреднение. Из-за флуктуаций появляется новый член $\langle \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}} \rangle_t$. Поскольку на квазистационарной стадии усредненный тороидальный поток через поперечное сечение плазмы $\Phi_z = \int B_z dS$ постоянен, усредненное электрическое поле в θ -направлении равно нулю ($\oint E_\theta dl = -d\Phi_z/dt = 0$) и $\langle \mathbf{v}_r \rangle_t = 0$. Для стационарности плазмы в RFP требуется, чтобы

$$\langle \eta j_\theta \rangle_t = \langle (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}})_\theta \rangle_t. \quad (17.9)$$

Другими словами, резистивная диссипация компенсируется эффективным электрическим полем из-за флуктуаций. Этот процесс называется механизмом МГД динамо. Было проведено много исследований [10–12] релаксационного процесса.

Если длина свободного пробега электрона очень велика, локальные соотношения, такие как закон Ома, могут быть непригодными. Вместо МГД теории динамо была предложена кинетическая теория динамо [13, 14], в которой важную роль в поддержании RFP-конфигурации играет аномальный перенос электронного импульса поперек магнитной поверхности.

17.1с. Удержание

Энергетическое время удержания τ_E в омически нагреваемой плазме может быть получено из уравнений энергетического баланса

$$\frac{(3/2)\langle n\kappa(T_e + T_i) \rangle_v 2\pi R \pi a^2}{\tau_E} = V_z I_p,$$

где V_z — напряжение на обходе и I_p — ток в плазме. Угловые скобки $\langle \dots \rangle_v$ означают здесь усреднение по объему. Энергетическое время удержания дается выражением

$$\tau_E = \frac{3\mu_0}{8} R \beta_\theta \frac{I_p}{V_z}, \quad (17.10)$$

где, по определению полоидального бета,

$$\beta_\theta \equiv \frac{\langle n\kappa(T_e + T_i) \rangle_v}{B_\theta^2/2\mu_0} = \frac{8\pi^2 a^2 \langle n\kappa(T_e + T_i) \rangle_v}{\mu_0 I_p^2}.$$

Из (17.10) следует, что для скейлинга τ_E нужны скейлинги β_θ и V_z . Чтобы приложить к плазме в RFP напряжение обхода, необходимо разрезать оболочку проводника, окружающего плазму, в тороидальном направлении. В этом случае в уравнение (17.2) для магнитной спиральности должен быть добавлен вклад поверхностного интеграла:

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -2 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \, dr - \int (\phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Индукированное электрическое поле в (проводящей) оболочке равно нулю; оно сосредоточено между краями разреза оболочки. Поверхностный интеграл содержит вклад $2V_z \Phi_z$ от разреза оболочки и от остальной части поверхности S_- , т. е.

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -2 \int \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \, dr + 2V_z \Phi_z - \int_{S_-} (\phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (17.11)$$

где Φ_z — усредненный по объему тороидальный магнитный поток $\Phi_z = \pi a^2 \langle B_z \rangle_v$. В квазистационарном состоянии временное усреднение $\langle \partial K / \partial t \rangle_t$ дает нуль. Поэтому

$$V_z = \frac{\int_{S_-} \langle \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \rangle_t \, dr + (1/2) \int_{S_-} \langle \phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A} \rangle_t \cdot \mathbf{n} \, dS}{\langle \Phi_z \rangle_t} = \frac{2\pi R}{\pi a^2} \eta_0 I_p \zeta + V_B,$$

$$V_B = \frac{2\pi R}{a} \frac{\langle \langle (\phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \rangle_t \rangle_{S_-}}{\langle \langle B_z \rangle_t \rangle_v},$$

где $\langle \dots \rangle_{S_-}$ — усреднение по поверхности S_- . Введено обозначение ζ для безразмерного фактора, определяемого радиальными профилями удельного сопротивления и магнитного поля:

$$\zeta \equiv \frac{\langle \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \rangle_t \rangle_v}{\eta_0 \langle \langle j_z \rangle_t \rangle_v \langle \langle B_z \rangle_t \rangle_v} = \frac{\langle \langle \mathbf{j} \rangle_t \cdot \langle \mathbf{B} \rangle_t \rangle_v + \langle \langle (\widetilde{\mathbf{j}}) \cdot \widetilde{\mathbf{B}} \rangle_t \rangle_v}{\eta_0 \langle \langle j_z \rangle_t \rangle_v \langle \langle B_z \rangle_t \rangle_v}.$$

Здесь η_0 — удельное сопротивление в центре плазмы. Если членом с флуктуациями можно пренебречь, то значение ζ в модифицированной модели бесселевых функций равно $\zeta \sim 10$, но в общем случае $\zeta > 10$ из-за флуктуаций. Величина V_B равна нулю, если вся плазменная граница покрыта проводящей оболочкой. В реальной ситуации на границе плазмы располагается лайнер из защитных материалов. Силовые линии магнитного поля могут пересекать стенку вследствие магнитных флуктуаций или сдвига положения плазмы ($\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \neq 0$, $\mathbf{E} \neq 0$). Таким образом, слагаемое V_B имеет конечное значение. Подстановка V_z в уравнение для энергетического времени удержания τ_E дает

$$\frac{1}{\tau_E} = \frac{8}{3\beta_\theta} \left(\left(\frac{\eta_0}{\mu_0 a^2} \right) 2\zeta + \frac{V_B/2\pi R}{aB_\theta(a)} \right).$$

Если плазма горячая, то резистивный член мал, и член с флуктуациями и вклад от V_B должны учитываться. Экспериментальный скейлинг в области $I_p < 0,5$ МА имеет вид $I_p/\pi a^2 \langle n \rangle_v = (1-5) \times 10^{-14}$ А·м, $\beta_\theta \sim 0,1$, $(\kappa T_e(\text{кэВ}))_0 \sim I_p(\text{МА})$.

17.1d. Поддержание тока переменным полем

Поддержание тока в плазме переменным полем было предложено в [15]; проведены первые предварительные эксперименты [16]. Из-за нелинейных явлений при МГД релаксации конфигурация RFP близка к модифицированной модели бесселевых функций. Если величины V_z и Φ во втором члене в правой части уравнения баланса магнитной спиральности (17.11) промодулированы как $V_z(t) = \widetilde{V}_z \cos \omega t$, $\Phi_z(t) = \Phi_{z0} + \widetilde{\Phi}_z \cos \omega t$, в произведении $2V_z \cdot \Phi_z$ появляется постоянная компонента тока $\widetilde{V}_z \widetilde{\Phi}_z$, которая компенсирует резистивные потери магнитной спиральности. Период осциллирующего поля должен быть длиннее характерного времени релаксации и короче времени диффузии магнитного поля. Необходимы дальнейшие оценки возмущающего действия осциллирующего поля на плазму.

§ 17.2. Стелларатор

В стеллараторах стационарная магнитогидродинамическая равновесная конфигурация плазмы может обеспечиваться одним только внешним полем, создаваемым катушками вне плазмы. Вращательное преобразование, которое необходимо для удержания тороидальной плазмы, формируется внешними катушками, так что стелларатор имеет достоинство стационарного удержания. Хотя первый стелларатор С, построенный в Лаборатории физики плазмы в Принстоне [17], был в 1969 г. переделан в токамак ST, достоинства стеллараторов (стационарное удержание без неустойчивостей, вызванных током) стимулировали эксперименты по удержанию плазмы на установках Wendelstein 7А, 7AS, Heliotron-E и ATF. В 1998 г. начались эксперименты на большом стеллараторе LHD (Large Helical Device). В стадии сооружения находится принципиально новый стелларатор W7-X.

17.2а. Винтовое поле

Рассмотрим магнитное поле с винтовой симметрией. В цилиндрических координатах (r, θ, z) поле выражается через $(r, \varphi \equiv \theta - \delta\alpha z)$, где $\alpha > 0$, $\delta = \pm 1$. Магнитное поле в области без токов ($\mathbf{j} = 0$) может быть описано скалярным потенциалом ϕ_B , удовлетворяющим уравнению $\Delta\phi_B = 0$,

$$\phi_B = B_0 z + \frac{1}{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l(l\alpha r) \sin(l\varphi), \quad (17.12)$$

$$\varphi \equiv \theta - \delta\alpha z.$$

Компоненты (B_r, B_θ, B_z) поля $\mathbf{B} = \nabla\phi_B$ даются выражениями

$$B_r = \sum_{l=1}^{\infty} l b_l I_l'(l\alpha r) \sin(l\varphi), \quad (17.13)$$

$$B_\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha r}\right) l b_l I_l(l\alpha r) \cos(l\varphi), \quad (17.14)$$

$$B_z = B_0 - \delta \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l(l\alpha r) \cos(l\varphi). \quad (17.15)$$

Векторный потенциал, соответствующий этому полю, имеет компоненты

$$A_r = -\frac{\delta}{\alpha^2 r} \sum_{l=1}^{\infty} b_l I_l(l\alpha r) \sin(l\varphi),$$

$$A_\theta = \frac{B_0}{2} r - \frac{\delta}{\alpha} \sum_{l=1}^{\infty} b_l I'_l(l\alpha r) \cos(l\varphi),$$

$$A_z = 0.$$

Воспользовавшись этим, мы можем записать

$$B_r = -\frac{\partial A_\theta}{\partial z}, \quad B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.$$

Магнитная поверхность $\psi = A_z + \delta\alpha r A_\theta = \delta\alpha r A_\theta = \text{const}$ дается выражением

$$\psi(r, \varphi) = B_0 \frac{\delta\alpha r^2}{2} - r \sum_{l=1}^{\infty} b_l I'_l(l\alpha r) \cos(l\varphi) = \text{const}. \quad (17,16)$$

Такое поле с винтовой симметрией может быть создано распределением винтовых токов, как показано на рис. 17.2.

Обозначим магнитные потоки в z - и θ -направлениях внутри магнитной поверхности через Φ и X (X есть интеграл по шагу вдоль z , т. е. по $2\pi/\alpha$). Они могут быть представлены в виде

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\varphi)} B_z(r, \varphi) r dr d\theta,$$

$$X = \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{r(\varphi)} B_\theta(r, \varphi) dr dz = \frac{1}{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\varphi)} B_\theta(r, \varphi) dr d\theta.$$

Поскольку $\alpha r B_z - \delta B_\theta = \alpha \partial(rA_\theta)/\partial r = \delta \partial\psi/\partial r$, получаем, что

$$\Phi - \delta X = 2\pi\psi/\delta\alpha.$$

Рассмотрим поле с одной гармоникой. Скалярный потенциал и магнитная поверхность представляются в виде

$$\phi_B = B_0 z + \frac{b}{\alpha} I_l(l\alpha r) \sin(l\theta - \delta l\alpha z),$$

$$\psi = \frac{B_0}{2\delta\alpha} \left((\alpha r)^2 - \frac{2\delta(\alpha r)b}{B_0} I'_l(l\alpha r) \cos(l\theta - \delta l\alpha z) \right) = \frac{B_0}{2\delta\alpha} (\alpha r_0)^2.$$

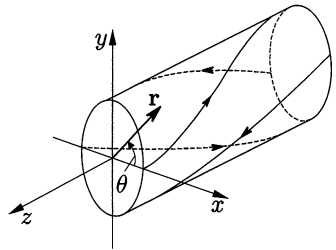


Рис. 17.2. Ток в винтовых обмотках

Сингулярные точки (r_s, θ_s) на плоскости $z = 0$ определяются условиями

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0.$$

Поскольку модифицированная функция Бесселя $I_l(x)$ удовлетворяет уравнению

$$I_l''(x) + \frac{1}{x} I_l'(x) - \left(1 + \frac{l^2}{x^2}\right) I_l = 0,$$

сингулярные точки находятся из условий

$$\sin(l\theta_s) = 0,$$

$$\alpha r \left(1 - \frac{\delta b l}{B_0} \left(1 + \frac{1}{(\alpha r_s)^2}\right) l_l(l\alpha r_s) \cos(l\theta_s)\right) = 0,$$

или

$$\theta_s = 2\pi(j-1)/l, \quad \delta b/B_0 > 0,$$

$$= 2\pi \left(j - \frac{1}{2}\right) / l, \quad \delta b/B_0 < 0, \quad j = 1, \dots, l,$$

$$\left| \frac{\delta b l}{B_0} \right| = \frac{1}{(1 + (\alpha r_s)^{-2}) I_l(l\alpha r_s)}.$$

Магнитные поверхности для $l = 1$, $l = 2$, $l = 3$ показаны на рис. 17.3. Магнитная поверхность, которая проходит через гипер-

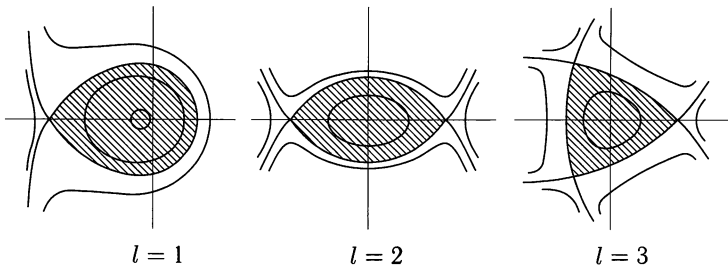


Рис. 17.3. Магнитные поверхности винтового поля с сепаратрисой

болическую сингулярную точку, называется *сепаратрисой*. Если $x \ll 1$, то модифицированная функция Бесселя

$$I_l(x) \approx \frac{1}{l!} \left(\frac{x}{2}\right)^l.$$

Магнитные поверхности в области $\alpha r \ll 1$ описываются выражением

$$(\alpha r)^2 - \frac{\delta b(l/2)^{l-1}}{B_0(l-1)!} (\alpha r)^l \sin l(\theta - \delta \alpha z) = \text{const.}$$

Величина B равна

$$\left(\frac{B}{B_0}\right)^2 = 1 - 2\frac{\delta lb}{B_0}I_l \cos(l\varphi) + \left(\frac{lb}{B_0}\right)^2 \left(I_l^2 \left(1 + \frac{1}{(\alpha r)^2}\right) \cos^2(l\varphi) + (I_l')^2 \sin^2(l\varphi) \right).$$

Величина B на сепаратрисе (r_s, θ_s) равна

$$\left(\frac{B}{B_0}\right)^2 = 1 - \frac{(\alpha r)^2}{1 + (\alpha r)^2},$$

и в точке $(r_s, \theta_s + \pi/l)$

$$\left(\frac{B}{B_0}\right)^2 = 1 + \frac{(\alpha r)^2}{1 + (\alpha r)^2}.$$

Видно, что величина B мала в сепаратрисных точках.

Оценим угол вращательного преобразования ι . Поскольку силовая линия магнитного поля задается соотношениями

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{rd\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z},$$

угол вращательного преобразования дается выражением

$$\frac{r\iota}{2\pi R} = \left\langle \frac{rd\theta}{dz} \right\rangle = \left\langle \frac{B_\theta}{B_z} \right\rangle = \left\langle \frac{(1/\alpha r)lbI_l(l\alpha r) \cos l(\theta - \delta z)}{B_0 - lbI_l(l\alpha r) \cos l(\theta - \delta z)} \right\rangle.$$

Здесь r и θ — значения координат на силовой линии магнитного поля, они являются функциями от z ; $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по z . В вакуумном поле выполняется соотношение $\oint B_\theta dl = \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = 0$, так что угол вращательного преобразования в первом порядке по b/B_0 равен нулю. Однако компоненты первого порядка B_θ и B_z «резонируют», приводя в результате к появлению вращательного преобразования во втором порядке. Метод усреднения дает формулу для угла вращательного преобразования [18, 19]

$$\frac{\iota}{2\pi} = \delta \left(\frac{b}{B}\right)^2 \frac{l^3}{2} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{I_l I_l'}{x} \right) \right)_{x=l\alpha r} \frac{R}{r}. \quad (17.17)$$

Используя разложение

$$I_l(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^l \left(\frac{1}{l!} + \frac{1}{(l+1)!}x^2 + \frac{1}{2!(l+2)!}x^4 + \dots \right),$$

находим, что

$$\frac{\iota}{2\pi} = \delta \left(\frac{b}{B}\right)^2 \left(\frac{1}{2^i l!}\right)^2 l^5 (l-1) \alpha R \left((l\alpha r)^{2(l-2)} + \dots \right). \quad (l \geq 2) \quad (17.18)$$

Пример анализа тороидального винтового поля приведен в статье [20].

17.2b. Стеллараторные установки

Обычные винтовые поля имеют заходность $l = 2$ или $l = 3$. Система Helias с пространственной осью имеет компоненту с $l = 1$. Если отношение малого радиуса a_h винтовой обмотки к R/m (R — большой радиус, m — число периодов поля) много меньше единицы, т. е. $ma_h/R \ll 1$, угол вращательного преобразования равен $\iota_2(r) = \text{const}$ для $l = 2$ и $\iota_3(r) = \iota(r/a)^2$ для $l = 3$. В этом случае в конфигурации с $l = 2$ мал шир, а в центральной области конфигурации с $l = 3$ очень мала величина $\iota_3(r)$. Однако если $ma_h/R \sim 1$, то $\iota_2(r) = \iota_0 + \iota_2(r/a)^2 + \dots$, так что шир может быть большим даже для $l = 2$.

Расположение катушек в случае $l = 2$ показано на рис. 17.4. Рис. 17.4, а демонстрирует стандартный тип стелларатора [21,

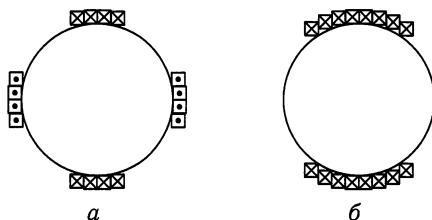


Рис. 17.4. Проекция винтовых обмоток в случае $l = 2$: а — стандартный стелларатор; б — гелиотрон/торсатрон

22], а рис. 17.4, б — гелиотрон-торсатронный тип [23, 24]. Обычные винтовые поля создают катушками тороидального поля и винтовыми обмотками. В гелиотрон-торсатронной конфигурации направление токов в винтовых катушках то же, что и в катушках тороидального поля, и винтовые поля могут быть получены одними винтовыми обмотками [27, 28]. Если шаг намотки выбран правильно, замкнутая магнитная поверхность может быть сформирована даже без катушек тороидального поля [29, 30]. Типичные устройства этого типа — Heliotron E, ATF и LHD. Установка LHD показана на рис. 17.6, а.

Если эллиптические катушки расставлены, как показано на рис. 17.5, а, может быть получено винтовое поле с $l = 2$ [25].

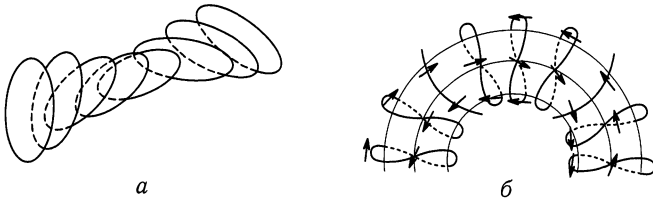


Рис. 17.5. *a* — расположение эллиптических катушек, используемых для получения линейного винтового поля с $l = 2$; *б* — скрученные (твистирующие) тороидальные катушки, которые создают тороидальное винтовое поле с $l = 2$

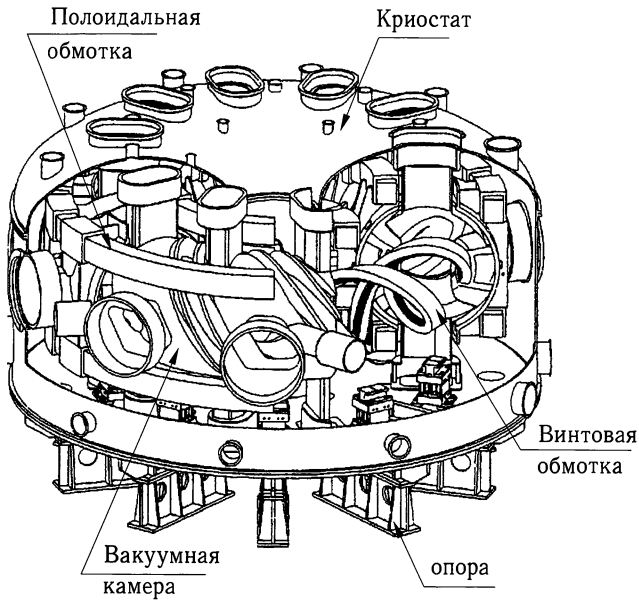
Токами в скрученных (или твистирующих) тороидальных катушках, показанных на рис. 17.5, *б*, можно заменить одновременно и токи в катушках тороидального поля, и токи в винтовых обмотках [26]. Типичными устройствами этого типа с использованием модульных катушек являются Wendelstein 7AS и 7X. Система модульных катушек Wendelstein 7X показана на рис. 17.6, *б*.

Для линейных винтовых полей магнитная поверхность $\Psi = rA_\theta$ существует из-за винтовой симметрии. Однако существование магнитных поверхностей в тороидальных винтовых полях в строгом математическом смысле не доказано. В соответствии с численными расчетами, магнитные поверхности существуют в центральной области около магнитной оси, но во внешней области силовые линии магнитного поля ведут себя эргодически, и магнитные поверхности разрушены. Хотя винтовые обмотки имеют относительно сложную структуру, силовые линии магнитного поля могут трассироваться компьютером, и конструирование винтовых устройств становится все более совершенным. Влияние геометрических ошибок на винтовые поля можно оценить, и с применением цифровых контролирующих устройств возможна точная намотка катушек ($\Delta l/R < 0,05-0,1\%$).

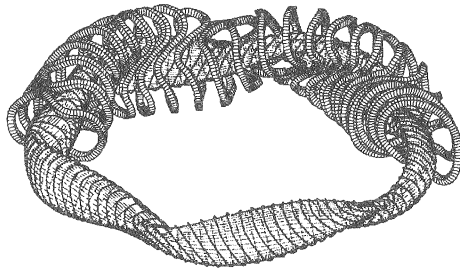
17.2с. Неоклассическая диффузия в винтовом поле

При анализе классической диффузии в результате кулоновских столкновений необходимо изучение траекторий движения заряженных частиц. В винтовом поле и даже в тороидальном поле токамака, полученных с конечным числом катушек, в выражении для модуля магнитного поля B имеется — в дополнение к тороидальному члену $-\epsilon_t \cos \theta$ — несимметричный неоднородный член, так что

$$\frac{B}{B_0} \approx 1 - \epsilon_n \cos(l\theta - m\varphi) - \epsilon_t \cos \theta. \quad (17.19)$$



а



б

Рис. 17.6. а верхний рисунок показывает схему установки LHD в г.Токи ($R = 3,9$ м, $a \approx 0,6$ м, $B = 3$ Т); б — нижний рисунок показывает систему модульных катушек и магнитную поверхность оптимизированного стелларатора Wendelstein 7-X в Грайфсвальде ($R = 5,5$ м, $a = 0,55$ м, $B = 3$ Т)

Изменение B вдоль силовых линий магнитного поля показано на рис. 17.7. Частицы, запертые в неоднородном поле винтовых гофров («рипплов»), дрейфуют поперек магнитных поверхностей и дают вклад в диффузию частиц, дополнительный к диффузии банановых частиц, свойственной токамаку. Силовые линии магнитного поля в области движения запертых частиц выпуклы наружу. Обозначим их кривизну как R_h . Запертые частицы испытывают ∇B -дрейф в полоидальном направлении (вдоль θ)

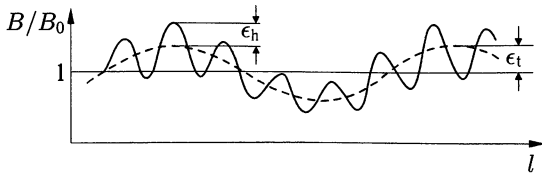
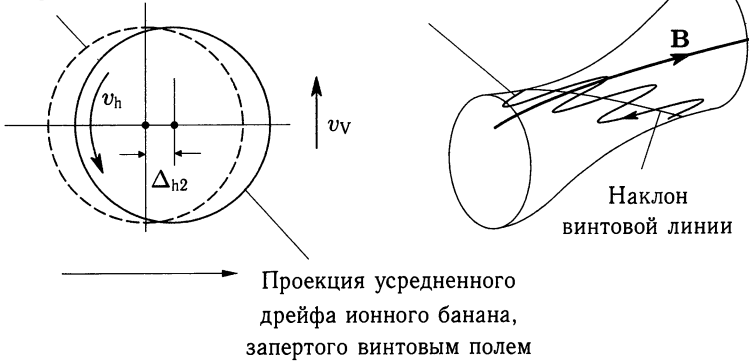


Рис. 17.7. Изменение величины B вдоль длины l силовой линии магнитного поля

со скоростью $v_h \approx mv_{\perp}^2 / (qBR_h)$ (см. рис. 17.8). Угловая скорость

Усредненная
магнитная
поверхность

Орбита ионного банана,
запертого винтовым полем



Проекция усредненного
дрейфа ионного банана,
запертого винтовым полем

Рис. 17.8. Орбита иона, запертого в винтовых рипплах

полоидального вращения равняется

$$w_h = v_h / r \sim (r / R_h) (kT / qBr^2). \quad (17.20)$$

В случае линейного винтового поля ($\epsilon_t = 0$) запертые частицы вращаются вдоль магнитной поверхности. В случае же тороидального винтового поля накладывается тороидальный дрейф в вертикальном направлении со скоростью $v_v \sim kT / (qBR)$ (см. разд. 3.5). Если эффективное столкновительное время $(\nu_{\text{eff}})^{-1} = (\nu / \epsilon_h)^{-1}$ короче, чем один период $(\omega_h)^{-1}$ полоидального вращения, отклонение орбиты банана от магнитной поверхности равно

$$\Delta_{h1} = v_v \frac{\epsilon_h}{\nu} = \epsilon_h \frac{kT}{qBR\nu}.$$

Коэффициент диффузии частиц [31]

$$D_{h1} \sim \epsilon_h^{1/2} \Delta_{h1}^2 \nu_{\text{eff}} = \epsilon_h^{3/2} \left(\frac{kT}{qBR} \right)^2 \frac{1}{\nu} = \epsilon_t^2 \epsilon_h^{3/2} \left(\frac{kT}{qBr^2\nu} \right) \left(\frac{kT}{qB} \right).$$

Поскольку $R_h \sim r/\epsilon_h$, получаем

$$D_{h1} \sim \gamma_h \epsilon_h^{1/2} \epsilon_t^2 \left(\frac{\omega_h}{\nu}\right) \left(\frac{kT}{qB}\right), \quad \nu/\epsilon > \omega_h, \quad (17.21)$$

где γ_h — коэффициент порядка $O(1)$ (рис. 17.9).

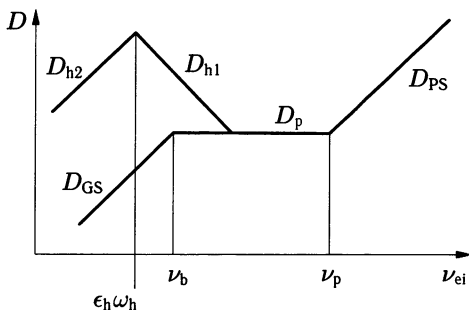


Рис. 17.9. Зависимость коэффициента неоклассической диффузии в винтовом поле от частоты столкновений. $\nu_p = (\nu/2\pi)v_{Te}/R$, $\nu_b = \epsilon_t^{3/2}\nu_p$, $\omega_h = \epsilon_h \kappa T_e / (qBR^2)$

Если эффективное время столкновений $(\nu_{\text{eff}})^{-1}$ больше, чем $(\omega_h)^{-1}$, отклонение Δ_{h2} орбиты от магнитной поверхности дается выражением

$$\Delta_{h2} \approx v_v/\omega_h \approx \frac{R_h}{R} r \sim \frac{\epsilon_t}{\epsilon_h} r,$$

и коэффициент диффузии равен (рис. 17.9)

$$D_{h2} \approx \epsilon_h^{1/2} \Delta_{h2}^2 \nu_{\text{eff}} = \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_h}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_h^{1/2}} r^2 \nu \quad (\nu/\epsilon_h < \omega_h).$$

Если частица слабо захвачена между пробками винтового поля, то возле точки отражения, где магнитное поле локально максимально и силовые линии вогнуты, она движется очень медленно. Эффективная кривизна, которую чувствует частица в среднем по времени, становится отрицательной (вогнутость). Траекторию запертой частицы в этом случае называют *супербанановой* [31]. При этом, однако, теоретическое рассмотрение основано на предположении, что вдоль траектории запертой частицы сохраняется продольный адиабатический инвариант ($J_{\parallel} \approx \text{const}$). Адиабатическая инвариантность имеет место, если угол полоидального проворота траектории частицы за один период колебаний в локальной пробочной ловушке мал. С ростом этого периода — для слабо захваченных частиц — адиабатическая инвариантность нарушается. Трассировка траекторий в чис-

ленных расчетах показывает, что в реалистичном случае $\epsilon_h \sim \epsilon_t$ супербананы не появляются [32]. Если траектория частицы пересекает стенку, то частица теряется. Это называют прямыми потерями. В пространстве скоростей из-за прямых потерь возникает пустая область [33]. Если появляется радиальное электрическое поле, то угловая частота полоидального дрейфового вращения становится равной $\omega_h + \omega_E$ ($\omega_E = E_r/B_0$). Под действием радиального электрического поля траектория изменяется.

Коэффициент термодиффузии χ_{h1} из-за частиц, запертых между пробками винтового поля, в области $\nu/\epsilon_h > \omega_h$ дается выражением

$$\chi_{h1} \sim \gamma_T \epsilon_t^2 \epsilon_h^{3/2} \left(\frac{kT}{qBr} \right)^2 \frac{1}{\nu}, \quad \gamma_T \approx 50. \quad (17.22)$$

Поскольку $\nu \propto T^{-1.5}$, то $\chi_{h1} \propto T^{3.5}$. Это указывает на серьезную проблему: в горячей плазме теплопроводностные потери становятся большими [31, 34, 35, 36].

17.2d. Удержание плазмы в стеллараторах [37,38,39]

После стелларатора Сосновные эксперименты проводились на малых, но более аккуратно изготовленных стеллараторных установках (Clasp, Proto Cleo, Wendelstein IIb, JIPP I, Heliotron D, Л1, Ураган 1). Щелочная плазма или плазма послесвечения, полученная нагревом волнами или инжекцией из источника, удерживалась спокойно. Были исследованы эффект стабилизации широм и скейлинги удержания.

Двухзаходные стеллараторы ($l = 2$) с большим шагом винта, такие как Wendelstein IIa или JIPP I-b, имеют примерно постоянное вращательное преобразование и маленький шир. Если угол вращательного преобразования рациональный, $i/2\pi = n/m$, то силовая линия возвращается в начальное положение после m оборотов и оказывается замкнутой. В этом случае электрические заряды, локализованные в каком-либо месте, не смогут перераспределиться равномерно по рациональной магнитной поверхности. Вероятно, должны возбуждаться резистивная дрейфовая или резистивная МГД неустойчивости, и станут возможными конвективные потери. При рациональных углах вращательного преобразования, действительно, наблюдались увеличенные потери (рис. 17.10), их еще называют резонансными. Резонансные потери можно уменьшить, введя шир магнитного поля.

Были сооружены стеллараторы среднего размера (Wendelstein 7A, Cleo, JIPP T-II, Heliotron-E, Л2, Ураган 2, Ураган 3). Время удержания омически нагретой плазмы ($T_e < 1$ кэВ) оказалось

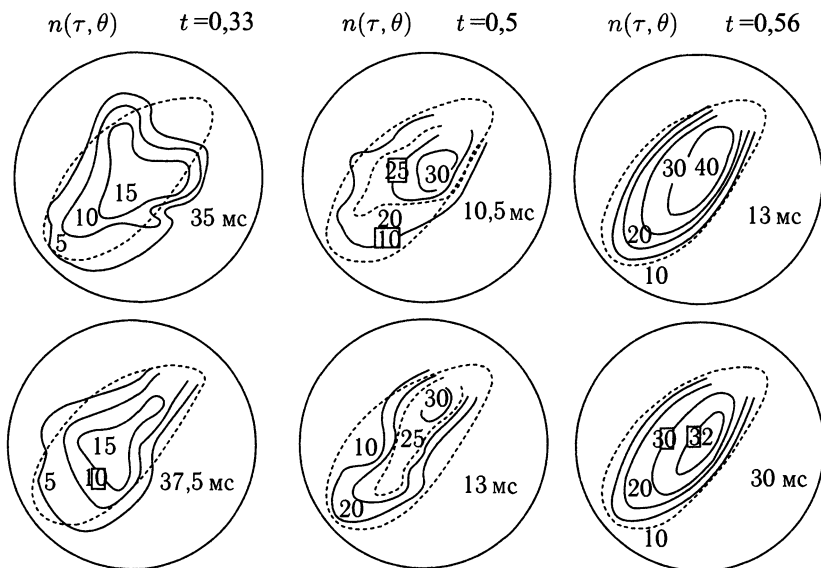


Рис. 17.10. Контурные диаграммы постоянной плотности плазмы, удерживаемой в стеллараторе JIPP I-b ($l = 2$) при углах вращательного преобразования $\nu/2\pi = 1/2, 1/3$ и $0,56$. [38]

таким же, как и в токамаках того же размера. Если угол вращательного преобразования больше, чем $\nu_h/2\pi > 0,14$, то большие срывы, наблюдавшиеся в токамаках, в стеллараторах подавляются (W 7A, JIPP T-II). Разработанные для токамаков способы ввода энергии в плазму при помощи волн или инжекции нейтральных пучков были использованы для получения плазмы и в стеллараторных системах. В Wendelstein 7A мишенная плазма создавалась омическим нагревом, затем эта плазма поддерживалась инжекционным нагревом при постепенном уменьшении плазменного тока и, наконец, высокотемпературная плазма с κT_i в несколько сотен эВ и $n_e \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ удерживалась без плазменного тока (1982). В установке Heliotron-E мишенная плазма создавалась электронным циклотронным резонансным нагревом с $\kappa T_e \sim 800 \text{ эВ}$, $n_e \sim 0,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, а затем плазма нагревалась с помощью нейтральной инжекции мощностью $1,8 \text{ МВт}$ до параметров: $\kappa T_i \sim 1 \text{ кэВ}$, $n_e = 2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ (1984). При $B = 0,94 \text{ Т}$ и мощности инжекции $P_{\text{НВ}} \sim 1 \text{ МВт}$ было получено среднее значение бета $\langle \beta \rangle \sim 2\%$. Эти экспериментальные результаты демонстрируют возможность стационарного удержания в стеллараторной конфигурации.

Экспериментальные скейлинги для энергетического времени удержания представлены командой Heliotron-E [40] в виде

$$\tau_E^{\text{LHD}} = 0,17a^{2,0}R^{0,75}n_{20}^{0,69}B^{0,84}P^{-0,58}, \quad (17.23)$$

где n_{20} — концентрация частиц в 10^{20} м^{-3} , а командой W7AS [41] —

$$\tau_E^{\text{W7AS}} = 0,115A^{0,74}a^{2,95}n_{19}^{0,5}B^{0,73}P^{-0,54} \left(\frac{\iota}{2\pi} \right)^{0,43}. \quad (17.24)$$

Скейлинг по международной стеллараторной базе данных [41]

$$\tau_E^{\text{ISS95}} = 0,079a^{2,21}R^{0,65}n_{19}^{0,51}B^{0,83}P^{-0,59} \left(\frac{\iota}{2\pi} \right)^{0,4}. \quad (17.25)$$

n_{19} означает концентрацию частиц в 10^{19} м^{-3} ; значение $\iota/2\pi$ берется при $r = (2/3)a$. Остальные единицы: с, м, Т, МВт.

На стеллараторе W7-AS в 1998 г. при инжекционном нагреве наблюдался разряд с улучшенным удержанием [42], фактор улучшения достигал ~ 2 по сравнению со скейлингом W7AS.

В 1998 г. начались эксперименты и на большом классическом стеллараторе LHD[43] со сверхпроводящими винтовыми обмотками (см. рис. 17.6, а). Сооружается принципиально новый стелларатор Wendelstein 7-X[44] со сверхпроводящими модульными катушками (см. рис. 17.6, б).

§ 17.3. Открытые системы

Открытые магнитные системы — более простые конфигурации, чем тороидальные системы. В открытых ловушках возможен абсолютный минимум B , тогда как в тороидальных системах реализуются только конфигурации со средним минимум B . Однако, хотя конфигурации с абсолютным минимумом B МГД устойчивы, распределение по скоростям в них оказывается немаксвелловским из-за торцевых потерь, и плазма «склонна» к кинетическим неустойчивостям.

Наиболее критической проблемой для открытых систем является подавление торцевых потерь. Торцевое запираение пробочных/зеркальных (см. примечание к разд. 2.5) ловушек электростатическим потенциалом изучалось на тандемных ловушках¹⁾.

¹⁾ В русской литературе обычно употребляют термин «амбиполярные ловушки», отражающий физический принцип амбиполярного удержания, лежащий в основе этих систем, а не внешние черты. — *Примеч. ред.*

В попытке вовсе исключить торцевые потери использовались бампи-торы, которые состоят из многих пробочных ловушек, соединенных в тор.

Касп — это другой тип открытых систем. Он имеет вращательную (осевую) симметрию и абсолютный минимум B . Однако в центре каспа магнитное поле обращается в нуль, так что магнитный момент не является инвариантом, и торцевые потери из кольцевой и осевых щелей каспа велики.

17.3а. Время удержания в пробочных ловушках и каспах

Частицы заперты в пробочном поле, если компоненты скорости, перпендикулярная v_{\perp} и параллельная v_{\parallel} к магнитному полю, удовлетворяют условию

$$\frac{v_{\perp}^2}{v^2} > \frac{b_0}{b_L}, \quad v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2,$$

где b_0 и b_L — значения магнитного поля в центре и на конце ловушки (в пробке) соответственно. Обозначив пробочное отношение b_L/b_0 через R_M , так что

$$\frac{b_0}{b_L} = \frac{1}{R_M} = \sin^2 \alpha_L,$$

преобразуем условие захвата к виду

$$\frac{v_{\perp}}{v} > \sin \alpha_L.$$

Если частица попадает в конус потерь, она немедленно теряется, так что *время удержания частиц* τ_p в пробочном поле определяется диффузией в пространстве скоростей в конус потерь и пропорционально времени ион-ионных столкновений τ_{ii} [45]:

$$\tau_p \approx \tau_{ii} \ln R_M. \quad (17.26)$$

Даже если пробочное отношение R_M увеличивается, время удержания растет только как $\ln R_M$. Это время не зависит от величины магнитного поля и размера плазмы. Если плотность равна $n \approx 10^{20} \text{ м}^{-3}$, ионная температура $\kappa T_i \approx 100 \text{ кэВ}$, атомное число $A = 2$ и заряд иона $Z = 1$, время ион-ионных столкновений равно $\tau_{ii} = 0,3 \text{ с}$, так что $n\tau_p = 0,3 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}\text{с}$. Этого значения недостаточно для термоядерного реактора. Необходимо увеличить эффективность утилизации энергии заряженных частиц, уходящих в торцы, или подавить торцевые потери.

Теперь рассмотрим потери в каспе. Поскольку магнитное поле в центре каспа равно нулю, магнитный момент не сохраняется.

Поэтому торцевые потери из кольцевой и осевых щелей каспа (рис. 17.11) определяются размером щелей и средней ионной скоростью \bar{v}_i . Поток частиц через кольцевую («линейную») щель шириной δ_L и радиусом R дается формулой

$$F_L = \frac{1}{4} n_L \bar{v}_i 2\pi R \cdot \delta_L, \quad \bar{v}_i = \left(\frac{8 \kappa T_i}{\pi M} \right)^{1/2},$$

где n_L — плотность частиц в щели, T_i — ионная температура и M — масса иона. Поток частиц из двух осевых («точечных») отверстий с радиусом δ_p равен [46]

$$F_p = \frac{1}{4} n_p \bar{v}_i \pi \delta_p^2 \times 2.$$

Наблюдаемое значение δ_L — около ионного ларморовского радиуса. Поскольку силовые линии даются выражением

$$r A_\theta = ar^2 z = \text{const},$$

имеем

$$\delta_p^2 R \approx R^2 \frac{\delta_L}{2}, \quad \Rightarrow \delta_p^2 = \frac{R \delta_L}{2},$$

так что $F_p \approx F_L/2$. Полный поток торцевых потерь равен

$$F \approx \frac{1}{4} \bar{v}_i 2\pi R \delta_L \left(n_L + \frac{n_p}{2} \right),$$

и, поскольку объем V каспа (рис. 17.11)

$$V = \pi R^2 \delta_L \left(\ln \frac{2R}{\delta_L} + 1 \right), \quad (17.27)$$

то время удержания в каспе дается выражением

$$\tau = \frac{nV}{F} \approx \frac{R}{\bar{v}_i} \left(\ln \frac{2R}{\delta_L} + 1 \right) \frac{4}{3} \frac{n}{n_L + n_p/2}, \quad (17.27)$$

где n — средняя плотность. Если $R = 10$ м, $B = 10$ Т, $\kappa T_i = 20$ кэВ, $A = 2$ и $\delta_L = \rho_B^i$, то $\tau \approx 0,1$ мс, что равно 10–20 пролетным временам R/\bar{v}_i . Даже если плотность равна $n \approx 10^{22}$ м⁻³, произведение $n\tau$ оказывается порядка 10^{18} м⁻³ × с, или в сто раз меньше необходимого для термоядерного синтеза.

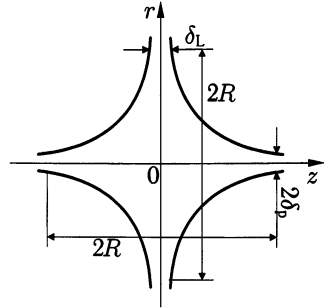


Рис. 17.11. Ширина линейного каспа δ_L и радиус точечного каспа δ_p

17.3б. Эксперименты по удержанию плазмы в пробочных ловушках

Один из наиболее важных экспериментов по удержанию в пробкотронах был сделан Иоффе и его сотрудниками, которые продемонстрировали, что пробочная конфигурация с минимумом B устойчива [47]. К образованию минимума B (рис. 17.12, в) приводит добавление стабилизирующих проводников, как показано на рис. 17.12, а, к пробочному полю (рис. 17.12, б).

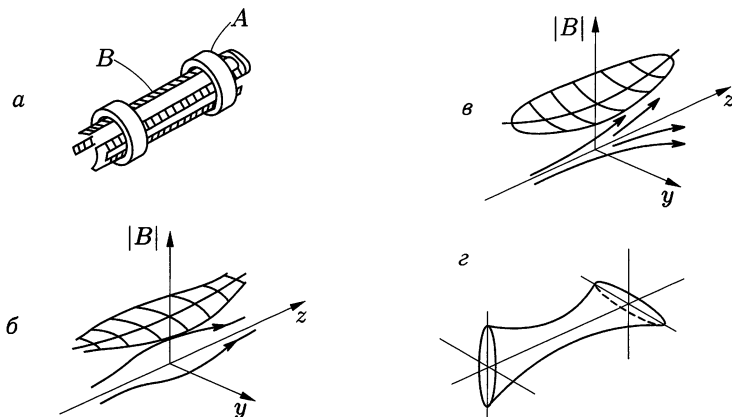


Рис. 17.12. Пробочное поле с минимумом B : а — Катушки пробочного поля (А) и стабилизирующие обмотки (палки Иоффе) (В); б — величина магнитного поля в простом пробкотроне; в — величина магнитного поля в пробкотроне с минимумом B . г — форма квадрупольного минимума B (рыбий хвост)

Определим *стеночное пробочное отношение* как отношение величины магнитного поля на радиальной границе к магнитному полю в центре. Если стеночное пробочное отношение увеличивается, исчезает желобковая неустойчивость, и время удержания становится большим. В ловушке ПР-5 удерживалась плазма с плотностью $10^9 - 10^{10} \text{ см}^{-3}$ и ионной температурой 3–4 кэВ в течение 0,1 с [48]. Однако при плотности больше, чем 10^{10} см^{-3} ($P_i > |\Omega_i|$), в плазме возникала конусная неустойчивость.

Один из наиболее обещающих результатов по удержанию в пробкотронах был получен в экспериментах [49] на установке 2Х. Здесь плазмод со средней энергией 2,5 кэВ, созданный плазменной пушкой, инжестировался в квадрупольную ловушку и сжимался. Начальная плотность захваченной плазмы была $n \approx 3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$, и $n\tau \approx 10^{10} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$. Величина магнитного поля равнялась 1,3 Т и $\beta \approx 5\%$. Средняя энергия ионов была 6–8 кэВ,

а электронная температура около 200 эВ. Поскольку $n\tau$ в идеальном случае (классическое кулоновское столкновительное время) равно $n\tau \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$, полученные результаты составляли 1/3–1/15 от такого идеала. В эксперименте на 2ХПВ [50] путем добавления малого потока теплой плазмы, заполняющего конус потерь, подавлялась микронеустойчивость. Нейтральная инжекция с энергией 15–19 кэВ и током 260 А позволяла получать плазму с ионной температурой 13 кэВ и параметром удержания $n\tau \approx 10^{11} \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}$ ($n \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$).

17.3с. Неустойчивости в пробочных ловушках

Обзор неустойчивостей в пробочных системах приведен в работах [51–53]. МГД неустойчивости могут быть подавлены в конфигурациях с минимумом B . Однако частицы в конусе потерь не удерживаются, и немаксвелловское распределение служит источником электростатических возмущений на ионной циклотронной частоте и ее гармониках, которые рассеивают частицы в конус потерь и тем самым усиливают торцевые потери. Можно показать, что неустойчивости возникают, если циклотронные волны взаимодействуют с другими модами, такими как электронные плазменные волны или дрейфовые волны.

Неустойчивость при малой плотности ($P_e \approx l|\Omega_i|$). Рассмотрим случай малой плотности. Если электронная плазменная частота P_e сравнивается с ионной циклотронной частотой $|\Omega_i|$, появляется взаимодействие между ларморовским движением иона и электронными ленгмюровскими колебаниями, и имеет место *неустойчивость Харриса* [54] (разд. 13.4).

Если плотность увеличивается дальше, косые ленгмюровские волны $\omega = (k_{\parallel}/k_{\perp})P_e$ взаимодействуют с гармониками $l|\Omega_i|$ ионной циклотронной волны. Чтобы ионы эффективно возбуждали неустойчивость, необходимо выполнение условия $\omega \approx k_{\perp}v_{\perp i}$. Если $\omega > 3k_{\parallel}v_{\parallel e}$, то затухание Ландау на электронах неэффективно. Таким образом, возбуждение будет происходить, если

$$\omega \approx l|\Omega_i| \approx P_e k_{\parallel}/k \approx k_{\perp}v_{\perp i} > 3k_{\parallel}v_{\parallel e},$$

где k_{\parallel} , k_{\perp} — параллельная и перпендикулярная компоненты волнового вектора, а v_{\parallel} , v_{\perp} — параллельная и перпендикулярная компоненты скорости. Следовательно, условие неустойчивости

$$\frac{P_e}{l|\Omega_i|} > \left(1 + \frac{9v_{\parallel e}^2}{v_{\perp i}^2}\right)^{1/2} \approx \left(1 + \frac{9MT_e}{mT_i}\right)^{1/2}. \quad (17.28)$$

Пусть L — длина ловушки. Поскольку выполняется неравенство $\kappa_{\parallel} > 2\pi/L$, имеем [55, 56]

$$\frac{L}{\rho_{\Omega i}} > \frac{6\pi v_{\parallel e}}{l v_{\perp i}}.$$

Неустойчивость Харриса изучалась детально в экспериментах [57].

Неустойчивость при большой плотности ($\Pi_i > |\Omega_i|$). Если плотность увеличивается, так что Π_i становится больше $|\Omega_i|$ (хотя неравенство $\Omega_e > \Pi_i$ все еще выполняется), возможна *конусная неустойчивость* с $\omega_r \approx \omega_i \approx \Pi_i$ [58]. Это конвективная мода, и для устойчивости длина ловушки должна быть меньше критической длины, которая равна

$$L_{\text{crit}} = 20A\rho_{\Omega i} \left(\frac{\Omega_e^2}{\Pi_e^2} + 1 \right)^{1/2}. \quad (17.29)$$

Здесь A порядка 5 ($A \approx 1$ для полного отражения и $A \approx 10$ без отражения от торцов). Таким образом, условие неустойчивости имеет вид $L > 100\rho_{\Omega i}$. Конусная неустойчивость возможна и в однородной плазме. Если же имеется градиент плотности, эта ветвь колебаний взаимодействует с дрейфовыми волнами, и может иметь место дрейфово-циклотронная конусная неустойчивость [57]. Если характерная длина изменения плотности сравнима с радиальным размером плазмы R_p , условие неустойчивости этой моды имеет вид

$$R_p < \rho_{\Omega i} \left(\frac{\Pi_i}{|\Omega_i|} \left(1 + \frac{\Pi_e^2}{\Omega_e^2} \right)^{-1/2} \right)^{4/3}. \quad (17.30)$$

Зеркальная неустойчивость. Когда бета становится большой, анизотропия давления плазмы индуцирует электромагнитную моду — *зеркальную неустойчивость* (заметим, что неустойчивость Харриса и конусная неустойчивость электростатические). Условие неустойчивости

$$\left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right) 2\beta > 1. \quad (17.31)$$

Чтобы избежать неустойчивостей, описанных выше, должны быть выполнены следующие условия:

$$L < (100-200)\rho_{\Omega i}, \quad (17.32)$$

$$R_p > 200\rho_{\Omega i}, \quad (17.33)$$

$$\beta < \frac{1}{2} \left(\frac{T_{\perp i}}{T_{\parallel i}} - 1 \right)^{-1} \approx 0,3-0,5. \quad (17.34)$$

Неустойчивость отрицательной массы. Предположим, что заряженные частицы в начале ларморовского движения были распределены равномерно, затем возникло малое возмущение, такое что положительный (для примера) заряд аккумулировался в области А, показанной на рис. 17.13. Тогда электрическое поле замедляет ионы в области справа от А, и их кинетическая энергия ϵ , соответствующая перпендикулярной к магнитному полю компоненте скорости, уменьшается. Ионы слева от А ускоряются, и их энергия ϵ увеличивается. Если частота вращения ω зависит от ϵ так, что $d\omega/d\epsilon < 0$, частота ω ионов в области справа от А увеличивается, и ионы достигают области А, несмотря на замедление. Эти ионы ведут себя так, как будто они имеют отрицательную массу. Ситуация такая же и для левой области. В результате заряд накапливается в области А, и возмущение неустойчиво. Этот тип неустойчивости называется неустойчивостью *отрицательной массы* [59]. Условие $d\omega/d\epsilon < 0$ удовлетворяется, если величина магнитного поля уменьшается с увеличением радиуса. Как и ожидалось, в простом пробкотроне, в котором B уменьшается с увеличением радиуса и ларморовский радиус частиц большой, неустойчивость отрицательной массы действительно была обнаружена [60]. Установка ПР-5 имела $\min B$ — величина магнитного поля росла с радиусом. В ней тоже обнаружили неустойчивость отрицательной массы, но другого типа [61]. Если перпендикулярная энергия ϵ уменьшается, то ионы могут глубже входить в пробочную область, и их ионная циклотронная частота увеличивается. В результате условие $d\omega/d\epsilon < 0$ выполнялось даже в ПР-5.

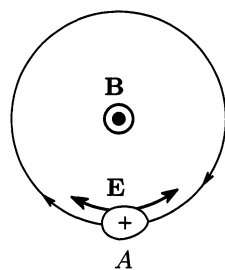


Рис. 17.13. Неустойчивость отрицательной массы

Неустойчивость в электронно-горячей плазме. Плазму с горячими электронами можно получить при электронном циклотронном резонансном нагреве в пробочном поле. Температура горячей компоненты может достигать значений от нескольких кэВ до нескольких сотен кэВ при плотности в преде-

лах $10^{10} - 10^{11} \text{ см}^{-3}$. Электромагнитная *свистовая (вистлер) неустойчивость* [61, 62] возбуждается анизотропией функции распределения ($T_{\perp} > T_{\parallel}$). Эта свистовая неустойчивость электронно-горячей плазмы наблюдалась экспериментально [63].

17.3d. Амбиполярные ловушки

Баланс входной и выходной энергий в реакторе на основе классической пробочной ловушки с трудом соблюдается даже в идеальных условиях удержания. Поэтому подавление торцевых потерь является критической проблемой для создания пробочного реактора. В этом разделе описываются исследования торцевого запираения с помощью электростатического потенциала. В случае простого пробкотрона время удержания ионов порядка ион-ионного столкновительного времени, а время удержания электронов порядка электрон-электронного или электрон-ионного времен столкновения ($\tau_{ee} \sim \tau_{ei}$). Так как $\tau_{ee} \ll \tau_{ii}$, в плазме должен быть избыток ионов, потенциал плазмы в пробкотроне должен быть положительным. Если на концах центрального пробкотрона расположены тандемом два пробкотрона, то можно ожидать, что при некоторых условиях (см. ниже) потенциалы плазмы в этих запирающих пробкотронах (plug cells) на обоих концах станут положительными по отношению к центральному пробкотрону (central cell). Эта конфигурация называется амбиполярной (тандемной) ловушкой¹⁾. Конус потерь в пространстве скоростей центрального пробкотрона амбиполярной ловушки, показанной на рис. 17.14, определяется условием

$$\left(\frac{v_{\perp}}{v}\right)^2 < \frac{1}{R_M} \left(1 - \frac{q\phi_c}{mv^2/2}\right), \quad (17.35)$$

где q — заряд частицы и R_M — пробочное отношение. Конусы потерь для электронов и ионов показаны на рис. 17.15 для случая положительного потенциала ϕ_c . Решив уравнение Фоккера—Планка, В. П. Пастухов [66] получил *время удержания ионов в амбиполярной ловушке* с положительным потенциалом

$$\tau_{\text{PAST}} = \tau_{ii} g(R_M) \left(\frac{e\phi_c}{\kappa T_{ic}}\right) \exp\left(\frac{e\phi_c}{\kappa T_{ic}}\right), \quad (17.36)$$

$$g(R_M) = \pi^{1/2} (2R_M + 1) (4R_M)^{-1} \ln(4R_M + 2),$$

¹⁾ Концепция амбиполярной ловушки была предложена новосибирскими физиками Г. И. Димовым, В. В. Закайдаковым и М. Е. Кишиневским [64] несколько ранее аналогичной идеи тандемной ловушки, выдвинутой ливерморскими учеными Т. К. Фаулером и Б. Г. Логаном [65]. — *Примеч. ред.*

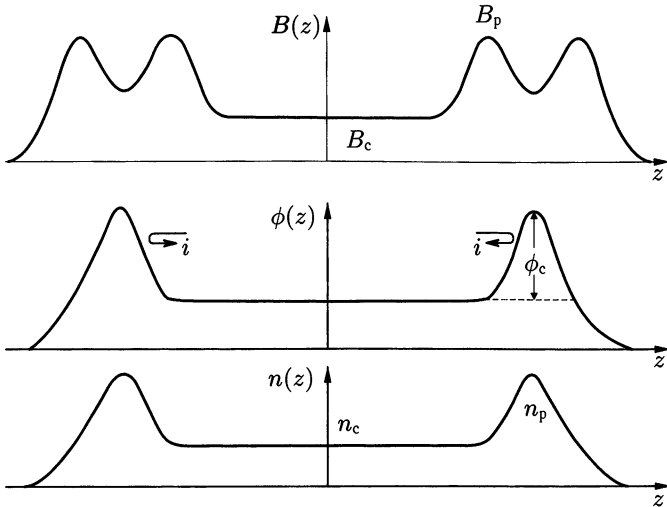


Рис. 17.14. Величина магнитного поля $B(z)$, электростатический потенциал $\phi(z)$ и плотность $n(z)$ вдоль оси z (оси пробкотронов) в амбиполярной ловушке

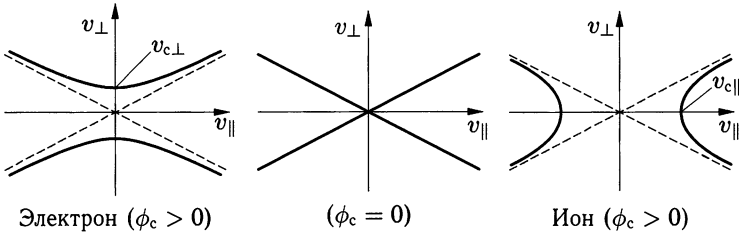


Рис. 17.15. Конусы потерь ионов ($q = Ze$) и электронов ($q = -e$) для положительного электростатического потенциала $\phi_c > 0$ и пробочного отношения R_M . $(v_{\perp c}/v)^2 = (e\phi_c/(R_M - 1))/(m_e v^2/2)$ в случае электронов. $(v_{\parallel c}/v)^2 = Ze\phi_c/(m_i v^2/2)$ в случае ионов

где T_{ic} — ионная температура в центральном пробкотроне и ϕ_c — разность потенциалов между запирающими и центральными пробкотронами. Обозначая электронные плотности в центральной и торцевой ловушках как n_c и n_p соответственно, из формулы Больцмана $n_p = n_c \exp(e\phi_c/\kappa T_e)$ получаем

$$\phi_c = \frac{\kappa T_e}{e} \ln \left(\frac{n_p}{n_c} \right). \tag{17.37}$$

Инжекцией нейтральных атомов в запирающие пробкотроны можно поднять плотность в них выше плотности в центральном пробкотроне. Если $R_M \sim 10$ и $e\phi_c/\kappa T_{ic} \sim 2,5$, то $\tau_{\text{ПАСТ}} \sim 100\tau_{\text{Пi}}$,

т. е. теоретическое время удержания в тандемной ловушке больше, чем в простом пробкотроне.

В этом типе тандемной системы для того, чтобы увеличить потенциал в запирающих доушках ϕ_c , нужно увеличивать плотность n_p в запирающей ловушке, и необходимая для этого мощность нейтральной инжекции оказывается большой. Поскольку запирающий потенциал ϕ_c пропорционален электронной температуре T_e , увеличение T_e также увеличивает ϕ_c . Если электроны в концевых пробкотронах термически изолировать от электронов в центральном пробкотроне, то электроны в концевых пробкотронах можно нагреть отдельно, и эффективность потенциального запираения будет улучшена. С этой целью между центральной и концевой ловушками вводится *термобарьер* [67], как показано на рис. 17.16. Если подходящим способом сформировать

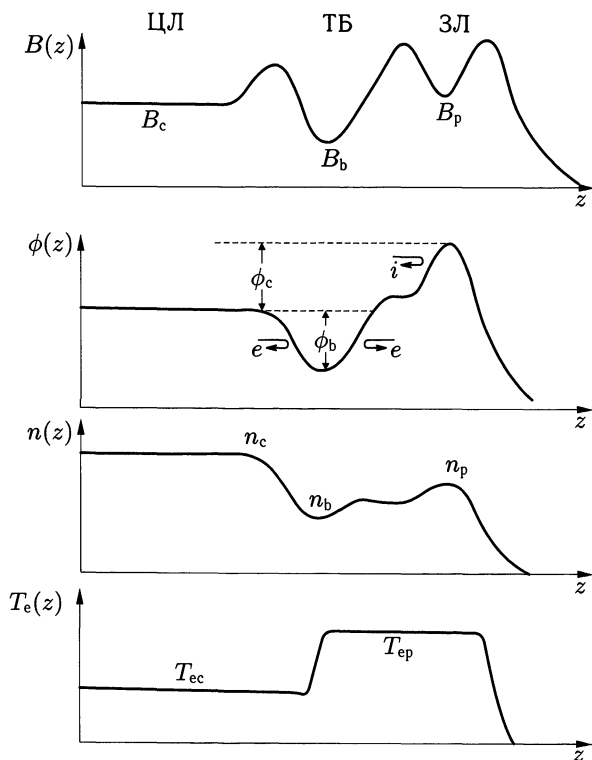


Рис. 17.16. Величина магнитного поля $B(z)$, электростатический потенциал $\phi(z)$, плотность $n(z)$ и электронная температура $T_e(z)$ в системе с термобарьером. ЦЛ — центральная ловушка, ТБ — термобарьер, ЗЛ — запирающая ловушка

потенциальный провал в термобарьере, электроны в запирающих и центральной ловушках будут термически изолированы.

Поскольку электроны в центральной ловушке считаются максвелловскими с температурой T_{ec} , имеем

$$n_c = n_b \exp\left(\frac{e\phi_b}{\kappa T_{ec}}\right). \quad (17.38)$$

Электроны в запирающей ловушке имеют модифицированное максвелловское распределение [68], и выполняется соотношение

$$n_p = n_b \exp\left(\frac{e(\phi_b + \phi_c)}{\kappa T_{ep}}\right) \left(\frac{T_{ep}}{T_{ec}}\right)^\nu, \quad (17.39)$$

где $\nu \sim 0,5$. Из (17.38), (17.39) получаем

$$\begin{aligned} \phi_c &= \frac{\kappa T_{ep}}{e} \ln\left(\frac{n_p}{n_b} \left(\frac{T_{ec}}{T_{ep}}\right)^\nu\right) - \frac{\kappa T_{ec}}{e} \ln\left(\frac{n_c}{n_b}\right) = \\ &= \frac{\kappa T_{ep}}{e} \ln\left(\frac{n_p}{n_c} \left(\frac{T_{ec}}{T_{ep}}\right)^\nu\right) + \left(\frac{T_{ep}}{T_{ec}} - 1\right) \frac{\kappa T_{ec}}{e} \ln\left(\frac{n_c}{n_b}\right), \end{aligned} \quad (17.40)$$

$$\phi_b = \frac{\kappa T_{ec}}{e} \ln\left(\frac{n_c}{n_b}\right). \quad (17.41)$$

Если электронная температура T_{ep} в запирающей ловушке увеличивается, величина ϕ_c может быть увеличена без выполнения условия $n_p > n_c$, так что эффективность потенциального запираения возрастет. Эксперименты по ампиоплярному удержанию проводились на установках ТМХ-У, ГАММА-10 и других.

Список литературы

1. *Robinson D.C., King R.E.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceedings, Novosibirsk, 1968). IAEA, Vienna. 1969. V. 1. P. 263.
2. *H. Bodin A.B., Newton A.A.* Nucl. Fusion. 1980. V. 20. P. 1255.
3. *Bodin H. A.B.* Plasma Phys. and Controlled Fusion. 1987. V. 29. P. 1297.
4. MST Team: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, Washington D. C., 1990), IAEA, Vienna. 1991. V. 2. P. 519; TPE-1RM20 Team: 19th Fusion Energy Conference. (Conference Proceedings, Montreal, 1996), IAEA, Vienna. 1997. V. 2. P. 95.
5. EX4/3(RFX), EX4/4(TPE-RX): 17th Fusion Energy Conference (Conference Proceedings, Yokohama, 1998). IAEA, Vienna. 1999. V. 1. P. 367, 375.
6. *Taylor J.B.* Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 1139.

7. *Jensen T.H., Chu M.S.* Phys. Fluids. 1984. V. 27. P. 2881.
8. *Шафранов В.Д., Юрченко Э.И.* ЖЭТФ. 1967.. Т. 53. С. 1157.
9. *Backer D.A., Bausman M.D., Buchenauer C.J., Burkhardt L.C. et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Conference Proceeding, Baltimore, 1982), IAEA, Vienna. 1983. V. 1. P. 587.
10. *Schnack D.D., Caramana E.J., Nebel R.A.* Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 321.
11. *Kusano K., Sato T.* Nucl. Fusion. 1986. V. 26. P. 1051.
12. *Miyamoto K.* Plasma Phys. and Controlled Fusion. 1988. V. 30. P. 1493.
13. *Jacobson A.R., Moses R.W.* Phys. Rev. 1984. V. A29. P. 3335.
14. *Moses R.W., Schoenberg K.F., Baker D.A.* Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 3152.
15. *Bevir M.K., Gray J.W.* Proc of Reversed Field Pinch Theory Workshop (Los Alamos, 1981). Report LANL-8944-C, P. 176; *Bevir M.K., Gimblett C.G.* Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 1826.
16. *Schoenberg K.F., Ingraham J.C., Munson C.P. et al.* Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 2285.
17. *Spitzer L., Jr.* Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 253.
18. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Вопросы теории плазмы. Вып. 2. / Под ред. *Леонтовича М.А.* — М.: Госатомиздат, 1963. С. 3.
19. *Miyamoto K.* Plasma Physics for Nuclear Fusion. — Revised Edition. — The MIT Press, Cambridge, Mass., 1989. Chap. 2.
20. *Nagasaki K., Itoh K., Wakatani M., Iiyoshi A.* J. Phys. Soc. Japan. 1988. V. 57. P. 2000.
21. W 7A Team: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, Baltimore, 1982), IAEA, Vienna. 1983. V. 2. P. 241.
22. *Andryukhina E.D., Batanov G.M., Berezhetsij M.S. et al.* Plasma Physics and Research Controlled Nuclear Fusion (Conference Proceedings, London, 1984). IAEA, Vienna. 1985. V. 2. P. 409.
23. *Uo K., Iiyoshi A., Obiki T., et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, London, 1984), IAEA, Vienna. 1985. V. 2. P. 383.
24. *Garcia L., Carreras B.A., Harris J.H.* Nucl. Fusion. 1984. V. 24. P. 115.
25. *Petrenko Yu.N., Popryadukhin A.P.* The 3rd International Symposium on Toroidal Plasma Confinements. Garching, 1973. D8.
26. *Wobig H., Rehker S.* Proceedings of the 7th Symposium on Fusion Technology. Grenoble, 1972. P. 345; *Rehker S., Wobig H.* Proc. of the 6th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics. Moscow, 1973. V. 1. P. 117; IPP 2/215 Max Planck Inst. of Plasma Phys. 1973.
27. *Gourdon C., Marty D., Maschke E.K., Dumont J.P.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, Novosibirsk, 1968), IAEA, Vienna. 1969. V. 1. P. 847.

28. *Uo K.* Plasma Phys. 1971. V. 13. P. 243.
29. *Mohri A.* J. Phys. Soc. Japan. 1970. V. 28. P. 1549.
30. *Gourdon C., Marty D., Maschke E.K., Touche J.* Nucl. Fusion. 1971. V. 11. P. 161.
31. *Kadomtsev B.B., Pogutse O.P.* Nucl. Fusion. 1971. V. 11. P. 67.
32. *Derr J.A., Shohet J.L.* Phys. Rev. Lett. 1979. V. 44. P. 1730.
33. *Wakatani M., Kodama S., Nakasuga M., Hanatani K.* Nucl. Fusion. 1981. V. 21. P. 175.
34. *Connor J.W., Hastie R.J.* Phys. Fluids. 1974. V. 17. P. 114.
35. *Kovrizhnykh L.M.* Nucl. Fusion. 1984. V. 24. P. 851.
36. *Hastings D.E., Houlberg W.A., Shaing K.C.* Nucl. Fusion. 1985. V. 25. P. 445.
37. *Young K.M.* Plasma Phys. 1974. V. 16. P. 119.
38. *Miyamoto K.* Nucl. Fusion. 1978. V. 18. P. 243.
39. *Carreras B.A., Griegen G., Harris J.H. et al.* Nucl. Fusion. 1968. V. 28. P. 1613.
40. *Sudo S., Takeiri Y., Zushi Z., et al.* Nucl. Fusion. 1990. V. 30. P. 11.
41. *Stroth U., Murakami M., Dory R., et al.* Nucl. Fusion. 1996. V. 36. P. 1063.
42. *Stroth U. et al.* Plasma Phys. Control. Fusion. 1998. V. 40. P. 1551.
43. *Iiyoshi A., Komori A., Ejiri A., et al.* Nucl. Fusion. 1999. V. 39. P. 1245; *Motojima O., Ohyabu N., Komori A., et al.* Plasma Phys. Control. Fusion. 1996. V. 38. P. A77.
44. *Wobig H.* Plasma Phys. Control. Fusion. 1999. V. 41. P. A159.
45. *Сивухин Д.В.* Вопросы теории плазмы. Вып. 4. / Под ред. *Леонтовича М.А.* — М.: Атомиздат, 1964. С. 81.
46. *Spalding I.J.* Nucl. Fusion. 1968. V. 8. P. 161; *Spalding I.J.* Advances in Plasma Physics. V. 4. / ed. by *Simon A., Thompson W.B.* N. Y. Interscience, 1971. P. 79.
47. *Готт Ю.В., Иоффе М.С., Тельковский В.Г.* Nucl. Fusion Suppl. (Conference Proceedings, Salzburg, 1961). 1962. Pt. 3. P. 1045.; *Байбородов Ю.Т., Иоффе М.С., Петров В.М., Соболев Р.И.* Атомная энергия. 1963. V. 14. P. 443.
48. *Байбородов Ю.Т., Иоффе М.С., Канаев Б.И.* и др. Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, Madison, 1971), IAEA, Vienna. 1971. V. 2. P. 697.
49. *Coensgen F.H., Cummins W.F., Finlayson V.A. et al.* ibid. 1971. V. 2. P. 721.
50. *Coensgen F.H., Cummins W.F., Logan B.G. et al.* Phys. Rev. Lett. 1975. V. 35. P. 1501.
51. *Fowler T.K.* Nucl. Fusion. 1969. V. 9. P. 3.
52. *Иоффе М.С., Кадомцев Б.Б.* УФН. 1970. V. 100. P. 601.
53. *Post R.F.* Nucl. Fusion. 1987. V. 27. P. 1579.
54. *Harris E.G.* Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2. P. 34.

55. *Dory R.A., Guest G.E., Harris E.G.* Phys. Rev. Lett. 1965. V. 14. P. 131.
56. *Guest G.E., Dory R.A.* Phys. Fluids. 1965. V. 8. P. 1853.
57. *Gordey J., Kuo-Petravic G., Murphy E., et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, Novosibirsk, 1968), IAEA, Vienna. 1969. V. 2. P. 267.
58. *Post R.F., Rosenbluth M.N.* Phys. Fluids. 1966. V. 9. P. 730.
59. *Postman H., Dunlap H., Dory R., et al.* Phys. Rev. Lett. 1966. V. 16. P. 265.
60. *Кадомцев Б.Б., Погуце О.П.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, Novosibirsk, 1968), IAEA, Vienna. 1969. V. 2. P. 125.
61. *Сагдеев П.З., Шафранов В.Д.* ЖЭТФ. 1960. Т. 39. С. 181.
62. *Sharer J., Trivelpiece A.* Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 591.
63. *Ikegami H., Ikezi H., Kawamura T., et al.* Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research. (Conference Proceedings, Novosibirsk, 1968), IAEA, Vienna. 1969. V. 2. P. 423.
64. *Димов Г.И., Закайдаков В.В., Кишиневский М.Е.* Физика плазмы. 1976. V. 2. P. 597.
65. *Fowler T.K., Logan B.G.* Comments Plasma Phys. Controlled Fusion Research. 1977. V. 2. P. 167.
66. *Pastukhov V.P.* Nucl. Fusion. 1974. V. 14. P. 3.
67. *Baldwin D.E., Logan B.G.* Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 1318.
68. *Cohen R.H., Bernstein I.B., Dorning J.J., Rowland G.* Nucl. Fusion. 1980. V. 20. P. 1421.

Глава 18

ИНЕРЦИОННОЕ УДЕРЖАНИЕ

Идея инерционного удержания заключается в том, что воздействием на вещество мощного энергетического источника (драйвера), такого как лазер или пучок частиц, за короткое время создается плазма высокой плотности, и реакции синтеза успевают пройти раньше, чем плазма разлетится. В данном процессе магнитное поле не играет удерживающей роли, поэтому этот способ удержания назван инерционным. Чтобы достичь таким путем термоядерных условий, необходимо сжать маленькую твердую дейтерий-тритиевую мишень до плотности в 10^3 – 10^4 раз большей, чем плотность обычной твердотельной мишени $n_s = 4,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Такого сжатия твердой частицы нельзя добиться простым обжатием лазерным пучком или пучком частиц: давление, создаваемое светом или частицами, слишком мало. Более пригодным методом сжатия является облучение пеллеты со всех сторон, как показано на рис. 18.1. На поверхности мишени образуется и одновременно

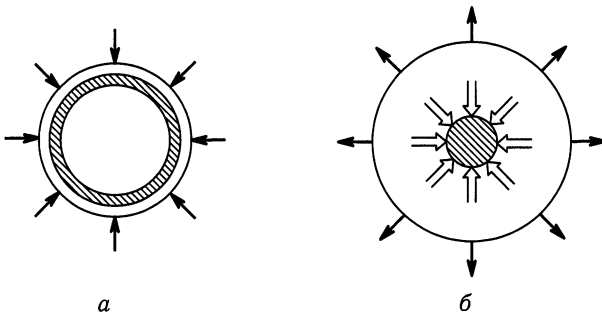


Рис. 18.1. Концептуальная схема процесса имплозии: *а* — облучение лазером или пучком частиц со всех сторон; *б* — расширение плазмы с поверхности пеллеты и имплозия вследствие образования потоков плазмы

нагревается плазма, которая расширяется во все стороны. Реакция от истечения плазмы наружу ускоряет внутреннюю часть пеллеты к центру и сжимает ее, как в своего рода сферической ракете. Такой процесс называется имплозией¹⁾. Изучение процессов имплозии является од-

¹⁾ Во избежание недоразумений отметим, что имплозия — процесс взрывного сжатия вещества мишени, тогда как вызывающее это сжатие быстрое «жертвенное» испарение оболочки называется абляцией. — *Примеч. ред.*

ним из наиболее важных вопросов, которому посвящены интенсивные теоретические и экспериментальные исследования.

§ 18.1. Условие поджига [1, 2]

Примем в качестве КПД мишени η_G отношение выделенной энергии синтеза E_{NF} к энергии E_L , затраченной на облучение мишени. Эффективность нагрева η_h при использовании некоторой энергетической установки определяется КПД преобразования энергии установки (драйвера) E_L в тепловую энергию сжатого ядра пеллеты. Обозначим плотность и объем сжатого плазменного ядра n и V соответственно и предположим, что $T_e = T_i = T$, тогда

$$3n\kappa TV = \eta_h E_L. \quad (18.1)$$

В процессе D-T реакции синтеза плотности n_D, n_T дейтерия и трития ($n_D = n_T = n/2$) уменьшаются, и

$$\frac{1}{n_D} \frac{dn_D}{dt} = -n_T \langle \sigma v \rangle,$$

$$n(t) = n_0 \frac{1}{1 + n_0 \langle \sigma v \rangle t / 2}.$$

Если плазма удерживается в течение времени τ , то коэффициент сжигания топлива η_b равен

$$\eta_b \equiv \frac{n_0 - n(\tau)}{n_0} = \frac{n_0 \langle \sigma v \rangle \tau / 2}{1 + n_0 \langle \sigma v \rangle \tau / 2}, \quad (18.2)$$

а энергия E_{NF} , выделяемая при синтезе, составляет

$$E_{NF} = \eta_b n V \alpha \frac{Q_{NF}}{2}. \quad (18.3)$$

Коэффициент α — это фактор усиления, обусловленный реакциями синтеза в окружающей ядро плазме, которая нагревается α -частицами, вылетающими из сильно сжатого ядра. КПД мишени η_G можно записать в виде

$$\eta_G \equiv \frac{E_{NF}}{E_L} = \eta_h \left(\frac{Q_{NF}}{6\kappa T} \alpha \right) \eta_b. \quad (18.4)$$

Отношение

$$\eta_{NF} \equiv \frac{Q_{NF}/2}{3\kappa T} \alpha \quad (18.5)$$

представляет собой коэффициент усиления в реакции синтеза: каждая пара ион + электрон обладает энергией $3\kappa T$ до реакции,

а $Q_{NF}/2$ — выход энергии в расчете на один ион в результате реакции. Поскольку $Q_{NF} = 17,6$ МэВ, то $\eta_{NF} \approx 293\alpha/(\kappa T)_{10}$, где $(\kappa T)_{10}$ — температура, измеряемая в десятках кэВ. Соотношения (18.4), (18.5) дают КПД мишени

$$\eta_G = \eta_h \eta_b \eta_{NF}. \quad (18.6)$$

Рассмотрим энергетический баланс возможного реактора инерционного синтеза. Эффективность преобразования тепловой энергии в электрическую η_{el} равна приблизительно 0,4. Эффективность преобразования электроэнергии в энергию облучения обозначим η_L . Для того чтобы получить полезный выход энергии из реактора, необходимо выполнить условие (см. рис. 18.2)

$$\eta_{el} \eta_L \eta_G > 1$$

(если положить $\eta_L \approx 0,05$, $\eta_{el} \approx 0,4$, то необходимо чтобы $\eta_G > 50$.) Следовательно, должно быть

$$\eta_G = \eta_h \left(\frac{Q_{NF}\alpha}{6\kappa T} \right) \left(\frac{n\langle\sigma v\rangle\tau}{2 + n\langle\sigma v\rangle\tau} \right) > \frac{1}{\eta_{el}\eta_L}, \quad (18.7)$$

что дает

$$n\tau > \frac{12\kappa T}{\eta_{el}(\eta_L\eta_h)\alpha Q_{NF}\langle\sigma v\rangle} \frac{1}{[1 - (\eta_{el}\eta_L\eta_h\eta_{NF})^{-1}]}. \quad (18.8)$$

Здесь необходимо, чтобы

$$\eta_{el}\eta_L\eta_h\eta_{NF} > 1. \quad (18.9)$$

Если $\eta_{el} \approx 0,4$, $\eta_L \approx 0,05$, $\eta_h \approx 0,1$, $\kappa T \approx 10$ кэВ, то необходимо соблюдение неравенства $\eta_{el}\eta_L\eta_h\eta_{NF} \approx 6\alpha/\kappa T$ (кэВ) $\approx 0,6\alpha > 1$.

Время удержания τ определяется характерным временем расширения плазмы и выражается следующим образом:

$$\tau \approx \frac{r}{3c_s}, \quad c_s^2 = \frac{5}{3} \frac{p}{\rho_m} = \frac{10}{3} \frac{\kappa T}{m_i}, \quad (18.10)$$

где c_s — скорость звука. Поскольку объем ядра V равен

$$V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

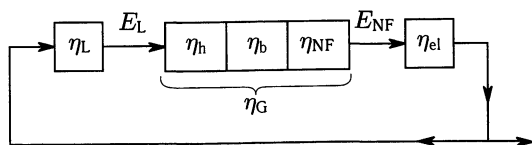


Рис. 18.2. Энергетическая диаграмма реактора инерционного удержания

то соотношение (18.1) можно переписать в виде

$$E_L = \frac{4\pi}{\eta_b} n \kappa T r^3. \quad (18.11)$$

Из (18.2) и (18.10) имеем

$$\tau = \frac{\eta_b}{(1 - \eta_b)} \frac{2}{n \langle \sigma v \rangle}, \quad \eta'_b \equiv \frac{\eta_b}{1 - \eta_b}, \quad (18.12)$$

$$r = 5,5 \left(\frac{\kappa T}{m_i} \right)^{1/2} \tau. \quad (18.13)$$

Если $\kappa T = 10$ кэВ, $m_i = 2,5 m_p$ (m_p — масса протона) и плотность плазмы выражается в единицах плотности твердого вещества $n_s = 4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$, то $\langle \sigma v \rangle = 1,3 \cdot 10^{-22} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$, и соотношения (18.12), (18.13), (18.11) дают

$$\begin{aligned} \tau &= 0,34 \cdot 10^{-6} \eta'_b \left(\frac{n_s}{n} \right) \text{ (с)}, \\ r &= 1,1 \eta'_b \left(\frac{n_s}{n} \right) \text{ (м)}, \end{aligned} \quad (18.14)$$

$$E_L = 1,2 \cdot 10^{15} \frac{(\eta'_b)^3}{\eta_b} \left(\frac{n_s}{n} \right)^2 \text{ (Дж)}.$$

Если плазма сжата до 10^3 плотностей твердого тела, $n = 10^3 n_s$, и принято $\eta'_b \approx 0,1$, то

$$\tau = 34 \text{ пс}, \quad r = 0,11 \text{ мм}, \quad E_L = 12 \text{ МДж},$$

и $n\tau \approx 1,5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}$. В таком случае для выполнения условия (18.7) необходимо, чтобы $\alpha > 19$. При массовой плотности сжатого ядра $\rho_m = 2,5 m_p n$ (m_p — масса протона) равенство (18.14) эквивалентно соотношению

$$r \rho_m \approx 2 \text{ г/см}^2.$$

Критические проблемы для реактора инерционного удержания состоят в том, насколько плотная плазма может быть получена посредством имплозии, и сколь надежно может быть установлен фактор усиления в окружающей плазме, нагреваемой α -частицами, рождающимися в сжатом ядре. Весьма важны и конструкция пеллеты, и материалы, из которых она сделана.

Технологическими проблемами энергетических устройств являются увеличение эффективности лазеров и улучшение фокусировки пучков электронов, легких и тяжелых ионов.

§ 18.2. Имплозия

Типичная структура pellets-мишени показана на рис. 18.3. Внешним слоем по отношению к сферической дейтерий-тритиевой оболочке является толкающий слой, который играет роль поршня во время сжатия; толкающий слой и слой топлива окружены слоем абляционного материала из легких ядер. Эффективность нагрева η_h равна коэффициенту преобразования энергии облучения в тепловую энергию сжатого топливного ядра. Эффективность нагрева зависит от взаимодействия облучения с абляционным материалом, процессов переноса частиц и энергии и гидродинамического движения плазмы. Энергия облучения поглощается на поверхности абляционного материала, и образуется нагретая плазма. Затем плазма расширяется, и внутренняя оболочка из дейтерий-тритиевого топлива ускоряется внутрь вследствие реактивного воздействия распространяющегося наружу потока плазмы. Сама имплозия происходит в центре. Эффективность нагрева η_h равна произведению трех величин, а именно, коэффициента поглощения η_{ab} энергии облучения абляционным материалом, коэффициента преобразования η_{hydro} поглощенной энергии облучения в кинетическую энергию гидродинамического движения плазмы и коэффициента преобразования η_T кинетической энергии гидродинамического движения в тепловую энергию сжатого ядра:

$$\eta_h = \eta_{ab} \eta_{hydro} \eta_T.$$

Внутренняя энергия твердого дейтерий-тритиевого топлива на единицу объема равна произведению энергии Ферми $\epsilon_F = (\hbar^2/2m_e)(3\pi^2n)^{2/3}$ на плотность с множителем $3/5$ ($\hbar = h/2\pi$ — постоянная Планка, m_e — масса электрона). Внутреннюю энергию на единицу массы w_0 можно положить $w_0 = 1,0 \cdot 10^8$ Дж/кг. Если раньше, чем начнется сжатие, произойдет предварительный нагрев, то начальная внутренняя энергия вырастет до $\alpha_p w_0$, далее твердое дейтерий-тритиевое топливо будет сжиматься адиабатически. Используя уравнение состояния идеального газа, можно выразить внутреннюю энергию w после

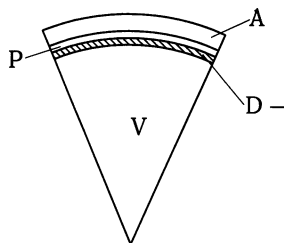


Рис. 18.3. Схема pellets. А — абляционный материал, Р — поршень, D-T — твердое D-T топливо, V — вакуум

сжатия следующим образом:

$$w = \alpha_p w_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3},$$

где ρ_0 и ρ — плотности массы до и после сжатия. Если предварительный нагрев сильно подавлен и α_p порядка 3, то внутренняя энергия на единицу массы после сжатия в 1000 раз порядка $w \approx 3 \cdot 10^{10}$ Дж/Кг. Эта величина w соответствует кинетической энергии единицы массы, движущейся со скоростью $v \approx 2,5 \times 10^5$ м/с ($w = v^2/2$). Если сферическая оболочка разгоняется до этой скорости и кинетическая энергия этого движения преобразуется в тепловую энергию топливного ядра в центре с хорошей эффективностью η_T , то сжатие твердой смеси дейтерия-трития с увеличением плотности в 1000 раз вполне возможно.

Когда пеллета облучается со всех сторон, плазма с поверхности абляционного слоя расширяется (со скоростью u). Возникает абляционное давление P_a , и сферическая оболочка с массой M ускоряется вовнутрь. Скорость сферической оболочки v , направленную вовнутрь, можно оценить на основе модели реактивного двигателя с потоком плазмы наружу [3, 4]:

$$\frac{d(Mv)}{dt} = -\frac{dM}{dt} \cdot u = SP_a, \quad (18.15)$$

где S — площадь поверхности облучки. Если среднюю плотность и толщину сферической оболочки обозначить как ρ и Δ соответственно, то масса равна $M = \rho S \Delta$. Обычно скорость u движения расширяющейся плазмы наружу значительно больше, чем скорость движения сферической оболочки внутрь, и u — почти константа. Изменение суммы кинетических энергий плазменного потока и сферической оболочки равно поглощенной энергии облучения:

$$\eta_{ab} I_L S = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} M v^2 \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{dM}{dt} \right) u^2, \quad (18.16)$$

где I_L — вложенная мощность на единицу поверхности. С помощью уравнений (18.15) и (18.16) величина поглощенной энергии E_a представляется в виде

$$E_a = \int \eta_{ab} I_L S dt \approx 12(\Delta M) u^2, \quad (18.17)$$

где ΔM — изменение массы сферической оболочки. Здесь использовалось приближение $u \gg v$, и $u = \text{const}$. Давление P_a

оценивается из (18.15) и (18.16) следующим образом:

$$P_a = \frac{u}{S} \left(-\frac{dM}{dt} \right) \approx 2\eta_{ab} I_L \frac{1}{u}. \quad (18.18)$$

Коэффициент преобразования η_{hydro} поглощенной энергии в кинетическую энергию сферической оболочки равен

$$\eta_{hydro} = \frac{1}{2E_a} (M_0 - \Delta M) v^2 = \frac{M_0 - \Delta M}{\Delta M} \left(\frac{v}{u} \right)^2.$$

Поскольку, согласно уравнению реактивного движения (18.15), $v/u = -\ln((M_0 - \Delta M)/M_0)$, то

$$\eta_{hydro} = \left(\frac{M_0}{\Delta M} - 1 \right) \left(\ln \left(1 - \frac{\Delta M}{M_0} \right) \right)^2 \approx \frac{\Delta M}{M_0} \quad (18.19)$$

при условии, что $\Delta M/M_0 \ll 1$.

В конце сжатия скорость ускоренной сферической оболочки, направленная внутрь, должна быть больше, чем 3×10^5 м/с. Необходимое для этого абляционное давление P_a может быть рассчитано из выражения (18.15), считая $S = 4\pi r^2$ и $M \approx M_0 C P_a \approx \text{const}$:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi P_a r^2}{M_0} = \frac{P_a}{\rho_0 r_0^2 \Delta_0} r^2, \quad v = -\frac{dr}{dt}.$$

Интегрирование $v \cdot dv/dt$ дает

$$P_a = \frac{3}{2} \rho_0 v^2 \frac{\Delta_0}{r_0}. \quad (18.20)$$

Здесь ρ_0 , r_0 , и Δ_0 — массовая плотность, радиус и толщина сферической оболочки при начальных условиях соответственно. Если $r_0/\Delta_0 = 30$ и $\rho_0 = 1$ г/см³, то для того чтобы получить скорость $v = 3 \cdot 10^5$ м/с, необходимо абляционное давление $P_a = 4,5 \cdot 10^{12}$ Н/м² = 45 Мбар (1 атм = 1,013 бар). Требуемая для этого интенсивность потока энергии внешнего источника (драйвера) I_L должна быть равна

$$\eta_{ab} I_L = \frac{P_a u}{2}. \quad (18.21)$$

Для того чтобы рассчитать скорость разлетающейся плазмы u , необходимо учесть взаимодействие энергии драйвера и оболочки абляционного материала. В этом разделе в качестве драйвера рассматривается лазер. Пусть звуковая скорость плазмы на поверхности абляционного слоя равна c_s , а массовая плотность ρ_c . Энергия, уносимая в единицу времени с поверхности абля-

ционного материала потоком плазмы, равна $4\rho_c c_s^3$. Она должна быть равна поглощенной мощности $\eta_{ab} I_L$. Плотность плазмы приблизительно равна критической плотности, соответствующей частоте (длине волны) лазерного излучения, что дает

$$u \approx 4c_s,$$

$$\eta_{ab} I_L \approx 4m_{DT} n_c c_s^3,$$

где $m_{DT} = 2,5 \times 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг — средняя масса дейтерия и трития, а критическая плотность $n_c = 1,1 \cdot 10^{27} / \lambda^2$ м⁻³ (λ — длина волны лазера в мкм). Из (18.21) получаем

$$P_a = 13 \left(\frac{(\eta_{ab} I_L)_{14}}{\lambda} \right)^{2/3} \quad (\text{Мбар}), \quad (18.22)$$

здесь $(\eta_{ab} I_L)_{14}$ берется в единицах 10^{14} Вт/см², а λ — в мкм. Этот закон подобия согласуется с экспериментальными данными в диапазоне $1 < (\eta_{ab} I_L)_{14} < 10$.

Большая часть исследований по имплозии проводится с использованием лазерных драйверов. Наблюдаемый коэффициент абсорбции η_{ab} уменьшается при увеличении интенсивности лазерного излучения I_L .

Измерены коэффициенты поглощения для лазера на неодимовом стекле с длиной волны 1,06 мкм (красный свет), поглощения второй гармоники 0,53 мкм (зеленый) и третьей 0,35 мкм (синий). Для коротких длин волн поглощение лучше и для $\lambda = 0,35$ мкм в диапазоне изменения $I_L = 10^{14} - 10^{15}$ Вт/см² приблизительно равно $\eta_{ab} \approx 0,9-0,8$. Определяемый из эксперимента коэффициент преобразования $\eta_{hydro} \approx 0,1-0,15$. Ожидается, что коэффициент преобразования η_T составит примерно 0,5. Уже получено необходимое абляционное давление $P_a = 45$ Мбар. Для того чтобы сжать топливо до сверхвысоких плотностей, необходимо во время процесса имплозии избежать предварительного прогрева внутренности пеллеты, поскольку до сжатия давление во внутренней части пеллеты следует поддерживать настолько низким, насколько это возможно. Когда используется лазер с большой длиной волны (СО₂-лазер, $\lambda = 10,6$ мкм), в результате взаимодействия лазерного излучения с плазмой образуются высокоэнергичные электроны, которые проникают во внутреннюю часть пеллеты и нагревают ее. При использовании коротковолновых лазеров высокоэнергичные электроны образуются в значительно меньших количествах.

Описанный выше процесс имплозии реализуется при прямом облучении пеллеты. Другой случай — не прямое облучение.

Пример такого облучения приведен на рис. 18.4. Здесь пелле-

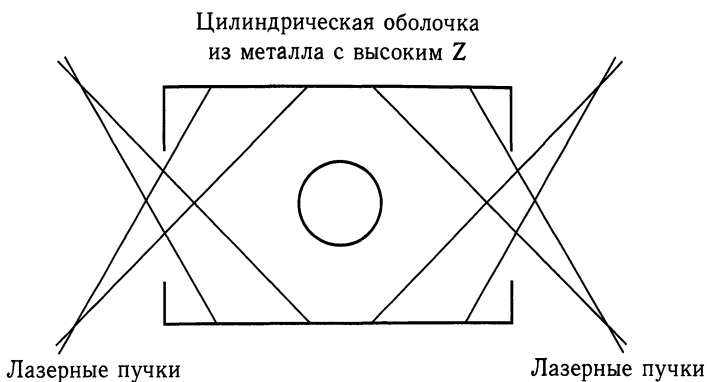


Рис. 18.4. Структура хольраум-мишени

та с топливом окружена внешней цилиндрической оболочкой. Внутренняя поверхность этой оболочки облучается светом лазера, и лазерное излучение преобразуется в энергию рентгеновского излучения и энергию плазмы. Это рентгеновское излучение вместе с частицами плазмы, в свою очередь, облучает внутреннюю пеллету с топливом, и начинается имплозия. Энергия рентгеновского излучения и плазмы удерживается в зазоре между внешней цилиндрической оболочкой и пеллетой с топливом. Они нужны для более эффективной имплозии. Такая конструкция [5, 6] называется мишенью типа хольраум¹⁾.

Самые последние исследования в области инерционного удержания, включающие проект NIF (National Ignition Facility), хорошо описаны в обзоре [7].

Список литературы

1. Brueckner K.A., Jorna S. Rev. of Modern Phys. 1974. V. 46. P. 325.
2. Emmett J.L., Nuckolls J., Wood L. Scientific American. 1974. V. 230. No. 6. P. 2.
3. Decoste R., Bodner S.E., Ripin B.H. et al. Phys. Rev. Lett. 1979. V. 42. P. 1673.
4. Mima K. Какуюго Kenkyu. 1984. V. 51. P. 400 (на японском).
5. Nuckolls J.H. Physics Today. 1982. V. 35. Sept. 25.
6. Lindl J. Phys. Plasmas. 1995. V. 2. P. 2933.
7. Lindl J. Inertial Confinement Fusion. — Springer/AIP Press, 1998.

¹⁾ От немецкого *Hohlraum*, что значит «полость» (или дословно «пустая комната»). — Примеч. ред.

Приложение А

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МГД

Вычислив функцию распределения из выведенного в гл. 4 уравнения Больцмана,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \frac{\mathbf{F}}{m} \nabla_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}}, \quad (\text{A.1})$$

можно усреднением по пространству скоростей получить массовую плотность, плотность тока, плотность заряда, массовую скорость и давление как функции координат \mathbf{r} и времени t . Однако уравнения для этих усредненных величин можно получить и не решая уравнения Больцмана, домножив (A.1) на некоторую функцию $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и проинтегрировав по пространству скоростей. Полагая последовательно $g = 1$, $\mathbf{g} = m\mathbf{v}$, $g = \frac{m}{2}v^2$, получаем уравнения для плотности, импульса и энергии соответственно. Обозначим среднее от функции g через $\langle g \rangle$, т. е.

$$\langle g(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}}. \quad (\text{A.2})$$

Так как плотность

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (\text{A.3})$$

то легко найти, что

$$n(\mathbf{r}, t) \langle g(\mathbf{r}, t) \rangle = \int g(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}. \quad (\text{A.4})$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int g \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial t} (n \langle g \rangle) - n \left\langle \frac{\partial}{\partial t} g \right\rangle, \\ \int g v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} d\mathbf{v} &= \frac{\partial (n \langle v_i g \rangle)}{\partial x_i} - n \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i g) \right\rangle, \end{aligned}$$

$$\int g \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = -\frac{n}{m} \left\langle \frac{\partial}{\partial v_i} g F_i \right\rangle.$$

Для силы $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ с учетом соотношения

$$\frac{\partial F_i}{\partial v_i} = 0$$

имеем

$$\int g \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial v_i} d\mathbf{v} = -\frac{n}{m} \left\langle F_i \frac{\partial g}{\partial v_i} \right\rangle.$$

В итоге, записывая (А.1) через средние величины, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n\langle g \rangle) - n \left\langle \frac{\partial g}{\partial t} \right\rangle + \nabla_r \cdot (n\langle g\mathbf{v} \rangle) - n \langle \nabla_r \cdot (g\mathbf{v}) \rangle - \frac{n}{m} \langle \mathbf{F} \cdot \nabla_v g \rangle = \\ = \int g \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Уравнение (А.5) с $g = 1$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_r \cdot (n\langle \mathbf{v} \rangle) = \int \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} d\mathbf{v}. \quad (\text{A.6})$$

Это уравнение непрерывности. Столкновительный член в (А.6) равен нулю в случае, когда можно пренебречь эффектами ионизации и рекомбинации. Далее, (А.5) с $\mathbf{g} = m\mathbf{v}$ дает уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (mn\langle \mathbf{v} \rangle) - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (nm\langle v_j \mathbf{v} \rangle) - n\langle \mathbf{F} \rangle = \int m\mathbf{v} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} d\mathbf{v}. \quad (\text{A.7})$$

Определим скорость случайного движения \mathbf{v}_r как

$$\mathbf{v} \equiv \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{v}_r$$

Согласно определению \mathbf{v}_r , среднее от этой скорости равно нулю:

$$\langle \mathbf{v}_r \rangle = 0.$$

Поскольку

$$\langle v_i v_j \rangle = \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + \langle v_{ri} v_{rj} \rangle,$$

то

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n\langle v_i v_j \rangle) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n\langle v_{ri} v_{rj} \rangle) = \\ &= n \sum_j \langle v_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i \rangle + \langle v_i \rangle \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n\langle v_j \rangle) + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (n\langle v_{ri} v_{rj} \rangle). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Умножение уравнения непрерывности (А.6) на $m\langle\mathbf{v}\rangle$ дает

$$m\frac{\partial}{\partial t}(n\langle\mathbf{v}\rangle) = mn\frac{\partial}{\partial t}\langle\mathbf{v}\rangle - m\langle\mathbf{v}\rangle\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(n\langle v_j\rangle) + m\langle\mathbf{v}\rangle\int\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{coll}}d\mathbf{v}. \quad (\text{A.9})$$

Определим *тензор давления*:

$$mn\langle v_{ri}v_{rj}\rangle \equiv P_{ij}, \quad (\text{A.10})$$

тогда уравнение движения, следующее из (А.7), (А.8), (А.9), имеет вид

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle\mathbf{v}\rangle \cdot \nabla\right)\langle\mathbf{v}\rangle = n\langle\mathbf{F}\rangle - \sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}P_{ij} + \int m\mathbf{v}_r\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{coll}}d\mathbf{v}. \quad (\text{A.11})$$

Если функция распределения изотропна, то тензор давления равен

$$P_{ij} = nm\langle v_{ri}^2\rangle\delta_{ij} = nm\frac{\langle v_r^2\rangle}{3}\delta_{ij} = p\delta_{ij},$$

и $p = nkT$ в случае распределения Максвелла (для анизотропной плазмы тензор давления равен $P_{ij} = P_{\perp}\delta_{ij} + (P_{\parallel} - P_{\perp})\mathbf{b}\mathbf{b}$, где \mathbf{b} — единичный вектор вдоль магнитного поля \mathbf{B}). Вводя тензор

$$\Pi_{ij} = nm\langle v_{ri}v_{rj} - (\langle v_r^2\rangle/3)\delta_{ij}\rangle,$$

можно выразить тензор давления как

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + \Pi_{ij}. \quad (\text{A.12})$$

Отличие Π_{ij} от нуля указывает на анизотропные свойства функции распределения. Если ввести столкновительный член

$$\mathbf{R} = \int m\mathbf{v}_r\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{coll}}d\mathbf{v}, \quad (\text{A.13})$$

то уравнение движения примет вид

$$mn\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle\mathbf{v}\rangle \cdot \nabla\right)\langle\mathbf{v}\rangle = n\langle\mathbf{F}\rangle - \nabla p - \sum_j\frac{\partial\Pi_{ij}}{\partial x_j} + \mathbf{R}. \quad (\text{A.14})$$

Сила трения \mathbf{R} определяет изменение импульса вследствие столкновений с частицами другого типа.

Пусть $g = mv^2/2$. С учетом $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}v^2 = 0$ уравнение переноса энергии сводится к

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{nm}{2}\langle v^2\rangle\right) + \nabla_r\left(\frac{nm}{2}\langle\mathbf{v}\mathbf{v}^2\rangle\right) = qn\mathbf{E} \cdot \langle\mathbf{v}\rangle + \int\frac{mv^2}{2}\left(\frac{\delta f}{\delta t}\right)_{\text{coll}}d\mathbf{v}. \quad (\text{A.15})$$

Дифференцируемые величины в левой части уравнения (А.15) преобразуются к виду

$$\frac{nm}{2} \langle \mathbf{v}^2 \rangle = \frac{nm}{2} (\langle \mathbf{v} \rangle)^2 + \frac{3}{2} p$$

$$\langle \mathbf{v} \mathbf{v}^2 \rangle = (\langle \mathbf{v} \rangle)^2 \langle \mathbf{v} \rangle + 2 \langle (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{v}_r) \rangle \langle \mathbf{v} \rangle + \langle v_r^2 \rangle \langle \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \rangle^2 \langle \mathbf{v}_r \rangle + 2 \langle (\langle \mathbf{v} \rangle \cdot \mathbf{v}_r) \mathbf{v}_r \rangle + \langle v_r^2 \mathbf{v}_r \rangle.$$

Второе и четвертое слагаемые равны нулю, а пятое слагаемое

$$\begin{aligned} \sum_i \langle v_i \rangle \langle v_{ri} v_{rj} \rangle &= \sum_i \langle v_i \rangle \frac{P_{ij}}{nm} = \frac{1}{nm} \sum_i \langle v_i \rangle (p \delta_{ij} + \Pi_{ij}) = \\ &= \frac{1}{nm} p \langle \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{nm} \sum_i \langle v_i \rangle \Pi_{ij}, \end{aligned}$$

так что

$$\langle \mathbf{v} \mathbf{v}^2 \rangle = \left(\langle \mathbf{v} \rangle^2 + 5 \frac{p}{nm} \right) \langle \mathbf{v} \rangle + 2 \sum_i \langle v_i \rangle \frac{\Pi_{ij}}{nm} + \langle v_r^2 \mathbf{v}_r \rangle.$$

Окончательно (А.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle \mathbf{v} \rangle^2 + \frac{3}{2} p \right) + \\ + \nabla \cdot \left(\frac{nm}{2} \langle \mathbf{v} \rangle^2 + \frac{5}{2} p \right) \mathbf{v} + \nabla \cdot \left(\sum_i \Pi_{ij} \langle v_i \rangle \right) + \nabla \cdot \mathbf{q} = \\ = qn \mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{R} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + Q, \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{m}{2} v_r^2 \mathbf{v}_r f d\mathbf{v}, \quad (\text{A.17})$$

$$Q(\mathbf{r}, t) = \int \frac{m v_r^2}{2} \left(\frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{coll}} d\mathbf{v}. \quad (\text{A.18})$$

Здесь Q — тепло, выделяемое при столкновениях, \mathbf{q} — плотность потока энергии вследствие случайного движения. Скалярное умножение (А.14) на $\langle \mathbf{v} \rangle$ дает

$$\begin{aligned} mn \left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \right) \frac{\langle \mathbf{v} \rangle^2}{2} + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla p + \sum_{i,j} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \langle v_i \rangle = \\ = qn \mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{R} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle, \end{aligned}$$

а из уравнения непрерывности (А.6) следует

$$\frac{m}{2} \langle \mathbf{v} \rangle^2 \left(\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \langle \mathbf{v} \rangle) \right) = 0,$$

поэтому уравнение (А.16) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{nm}{2} \langle \mathbf{v} \rangle^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{nm}{2} \langle \mathbf{v} \rangle^2 \langle \mathbf{v} \rangle \right) + \langle \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla p + \sum_{i,j} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \langle v_i \rangle = \\ = qn \mathbf{E} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \mathbf{R} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Вычитанием из (А.16) этого уравнения получим

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} p \langle \mathbf{v} \rangle \right) + p \nabla \cdot \langle \mathbf{v} \rangle + \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i \rangle + \nabla \cdot \mathbf{q} = Q. \quad (\text{А.19})$$

Соотношение $p = n\kappa T$ и уравнение непрерывности (А.6) дают

$$\frac{3}{2} \frac{\partial (n\kappa T)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{3}{2} n\kappa T \langle \mathbf{v} \rangle \right) = \frac{3}{2} n \frac{d\kappa T}{dt}.$$

Полагая $s \equiv \ln((\kappa T)^{3/2}/n) = \ln(p^{3/2}/n^{5/2})$, можно переписать (А.19) как

$$\kappa T n \frac{ds}{dt} = \kappa T \left(\frac{\partial (ns)}{\partial t} + \nabla \cdot (ns \langle \mathbf{v} \rangle) \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \sum_{i,j} \Pi_{ij} \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + Q. \quad (\text{А.20})$$

Приложение В

**ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ ДЛЯ
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ
СИСТЕМ**

§ В.1. Интеграл энергии в наглядной форме

Интеграл энергии

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_V \left(\gamma p (\nabla \cdot \xi)^2 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}))^2 + (\nabla \cdot \xi) (\xi \cdot \nabla p) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\mu_0} (\xi \times (\nabla \times \mathbf{B})) \cdot \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}) \right) dr = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{\mathbf{B}_1^2}{\mu_0} + \gamma p (\nabla \cdot \xi)^2 + (\nabla \cdot \xi) (\xi \cdot \nabla p) - \xi \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_1) \right) dr \quad (\text{B.1})
 \end{aligned}$$

был выведен в гл. 8, см. (8.46). Это выражение может быть далее преобразовано к более наглядному виду [1, 2]

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int \left(\gamma p (\nabla \cdot \xi)^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{1\perp}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{1\parallel}| - \mathbf{B} \frac{\mu_0 (\xi \cdot \nabla p)}{B^2} \right)^2 - \\
 &\quad - \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})}{B^2} (\xi \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_1 - 2(\xi \cdot \nabla p) (\xi \cdot \boldsymbol{\kappa}) \right) dr, \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\kappa}$ — вектор кривизны силовой линии магнитного поля. Первый член подынтегрального выражения в (B.2) связан со звуковыми волнами, второй и третий — с альфвеновскими. Четвертый член ответствен за винтовые моды, а последний — за баллонные.

Переход от (B.1) к (B.2) делается следующим образом. Если представить ξ как сумму параллельной $\xi_{\parallel} \mathbf{b}$ и перпендикулярной ξ_{\perp} к магнитному полю $\mathbf{B} = B \mathbf{b}$ компонент,

$$\xi = \xi_{\parallel} \mathbf{b} + \xi_{\perp},$$

то два последних члена (В.1) сводятся к

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) + (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{B}_1 &= \\
 &= (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\parallel} \mathbf{b}) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + \\
 &\quad + \boldsymbol{\xi}_{\parallel} (\mathbf{j} \times \mathbf{b}) \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1 = \\
 &= (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot (\boldsymbol{\xi}_{\parallel} \mathbf{b}) + \frac{\boldsymbol{\xi}_{\parallel}}{B} \nabla p \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) + \\
 &\quad + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1 = \\
 &= (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left(\frac{\boldsymbol{\xi}_{\parallel}}{B} \right) + \frac{\boldsymbol{\xi}_{\parallel}}{B} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \times \nabla p) + \\
 &\quad + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1 = \\
 &= (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left(\frac{\boldsymbol{\xi}_{\parallel}}{B} \right) + \frac{\boldsymbol{\xi}_{\parallel}}{B} \nabla \cdot ((\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \mathbf{B}) + \\
 &\quad + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1 = \\
 &= \nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\xi}_{\parallel}}{B} (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \mathbf{B} \right) + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} + (\mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1. \quad (\text{В.3})
 \end{aligned}$$

Плотность тока \mathbf{j} также представляется в виде суммы параллельной и перпендикулярной к магнитному полю компонент:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{B} + \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2},$$

где

$$\sigma = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{B}}{B^2}.$$

Последний член в (В.3) равен

$$(\mathbf{j} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1 = \sigma (\mathbf{B} \times \boldsymbol{\xi}_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_{\perp} \cdot \nabla p)}{B^2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1,$$

и $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp}$ во втором члене в (В.3)

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_{\perp} &= \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{B^2} \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \right) = \\
 &= (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{B^2} - \frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) = \\
 &= (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{B^2} - 2(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\nabla B}{B^3} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}}{B^2} \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) = \\
 &= -\frac{(\boldsymbol{\xi} \cdot \mu_0 \nabla p)}{B^2} + 2(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} - \frac{\mathbf{B}}{B^2} \cdot \mathbf{B}_1. \quad (\text{В.4})
 \end{aligned}$$

Теперь интеграл энергии (В.1) сворачивается к виду

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_V \left(\gamma p (\nabla \cdot \xi) + \frac{\mathbf{B}_1^2}{\mu_0} - \frac{\mu_0 (\xi \cdot \nabla p)^2}{B^2} - (\xi \cdot \nabla p) \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1}{B^2} - \right. \\
 &- (\xi_{\perp} \cdot \nabla p) \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1}{B^2} + \sigma (\mathbf{B} \times \xi_{\perp}) \cdot \mathbf{B}_1 + 2 (\xi \cdot \nabla p) (\xi \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} \left. \right) dr = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \left(\gamma p (\nabla \cdot \xi) + \frac{1}{\mu_0} \left| \mathbf{B}_1 - \frac{\mu_0 (\xi \cdot \nabla p)^2}{B^2} \mathbf{B} \right|^2 - \frac{(\mathbf{j} \cdot \mathbf{B})}{B^2} (\xi_{\perp} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B}_1 - \right. \\
 &\quad \left. - 2 (\xi \cdot \nabla p) \left(\frac{\mu_0 (\xi \cdot \nabla p)}{B^2} - (\xi \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} \right) \right) dr.
 \end{aligned}$$

Используя вектор κ

$$\kappa \equiv \frac{1}{2B^4} (\mathbf{B} \times \nabla (B^2 + 2\mu_0 p)) \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 \nabla p}{B^2} + \frac{(\mathbf{B} \times \nabla B) \times \mathbf{B}}{B^3}, \quad (\text{В.5})$$

последний (баллонный) член можно представить как

$$-2 (\xi \cdot \nabla p) (\xi \cdot \kappa),$$

поскольку

$$\begin{aligned}
 (\xi \cdot \kappa) &= \frac{\mu_0 (\xi \cdot \nabla p)}{B^2} + \frac{\xi \cdot (\mathbf{B} \times \nabla B) \times \mathbf{B}}{B^3} = \\
 &= \frac{\mu_0 (\xi \cdot \nabla p)}{B^2} - \frac{(\xi \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} \times \nabla B)}{B^3}. \quad (\text{В.6})
 \end{aligned}$$

(В.4) и (В.6) дают

$$\nabla \cdot \xi_{\perp} + 2 (\xi_{\perp} \cdot \kappa) = \frac{\mu_0 (\xi_{\perp} \cdot \nabla p)}{B^2} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1}{B^2}. \quad (\text{В.7})$$

Из (6.7) имеем

$$\nabla (2\mu_0 p + B^2) = 2 (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Несложно показать, что κ совпадает с вектором кривизны:

$$\begin{aligned}
 \kappa &= \frac{1}{B} (\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \cdot \nabla) (B\mathbf{b})) \times \mathbf{b} = \\
 &= \left(\mathbf{b} \times ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \frac{1}{B} (\mathbf{b} \cdot \nabla) B) \right) \times \mathbf{b} = ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b})_{\perp} = -\frac{\mathbf{n}}{R}.
 \end{aligned}$$

Здесь R — радиус кривизны, а \mathbf{n} — единичный вектор, направленный из центра кривизны в точку на магнитной силовой линии (см. рис. 2.4 в гл. 2).

§ В.2. Интеграл энергии для осесимметричных тороидальных систем

Для случая осесимметричной тороидальной системы интеграл энергии может быть сведен к более удобному виду. Действительно, осесимметричное магнитное поле представимо в виде

$$\mathbf{B} = \frac{\hat{I}(\psi)}{R} \mathbf{e}_\varphi + B_\chi \mathbf{e}_\chi, \quad \hat{I}(\psi) \equiv \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi}, \quad (\text{В.8})$$

где φ — угол вокруг оси тора, а ψ — потоковая функция, определенная

$$\psi = -RA_\varphi. \quad (\text{В.9})$$

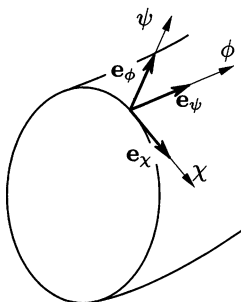


Рис. В.1. Ортогональная система координат (ψ, χ, φ) с соответствующими координатными ортами $\mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_\chi, \mathbf{e}_\varphi$

Здесь \mathbf{e}_φ и \mathbf{e}_χ — единичные векторы в тороидальном и полоидальном направлениях (см. рис. В1), R — расстояние от оси симметрии, а A_φ — это φ -компонента векторного потенциала магнитного поля. R - и Z -компоненты магнитного поля

$$RB_R = \frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad RB_Z = -\frac{\partial \psi}{\partial R}.$$

Можно ввести ортогональную систему координат (ψ, χ, φ) , в которой координатные поверхности $\psi = \text{const}$ образуют магнитные поверхности, а χ, φ — полоидальный и тороидальный углы соответственно. Метрика для этих координат такова:

$$ds^2 = \left(\frac{d\psi}{RB_\chi} \right)^2 + (JB_\chi d\chi)^2 + (Rd\varphi)^2, \quad (\text{В.10})$$

а элемент объема выражается как $dV = J(\psi) d\psi d\chi d\varphi$. Силовая линия определяется, с одной стороны, условием $\psi = \text{const}$, а с другой,

$$\frac{Rd\varphi}{JB_\chi d\chi} = \frac{B_\varphi}{B_\chi} = \frac{\hat{I}(\psi)}{RB_\chi},$$

т. е.

$$\frac{d\varphi}{d\chi} = \frac{J(\psi)\hat{I}(\psi)}{R^2} \equiv \hat{q}(\psi, \chi);$$

при этом фактор запаса устойчивости

$$q(\psi) = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{J(\psi)\hat{I}(\psi)}{R^2} d\chi.$$

Интеграл энергии для осесимметричных тороидальных систем имеет вид [3]

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{|\mathbf{B}_1|^2}{\mu_0} + \gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^*)(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) - \boldsymbol{\xi}^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_1) \right) d\mathbf{r} = \\
 &= \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} \frac{B^2 k_{\parallel}^2}{B_{\chi}^2 R^2} |X|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{R^2}{J^2} \left| \frac{\partial U}{\partial \chi} - I \left(\frac{JX}{R^2} \right)' \right|^2 + \right. \\
 &+ \frac{B_{\chi}^2}{2\mu_0} \left| inU + X' - \frac{\mu_0 j_{\varphi}}{RB_{\chi}} X \right|^2 + \frac{1}{2} \gamma p \left| \frac{1}{J} (JX)' + iBk_{\parallel} Y + inU \right|^2 - \\
 &\quad \left. - KXX^* \right) J d\psi d\chi d\varphi. \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

Вывод выражения (B.11) можно прокомментировать следующим образом.

В произвольной ортогональной системе координат (u^1, u^2, u^3) с метрикой

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= h_1^2 (du^1)^2 + h_2^2 (du^2)^2 + h_3^2 (du^3)^2, \\
 g^{1/2} &= h_1 h_2 h_3
 \end{aligned}$$

градиент, дивергенция и ротор вектора $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3$ (\mathbf{e}_j — единичные векторы) выглядят как

$$\begin{aligned}
 \nabla \phi &= \sum \frac{1}{h_j} \frac{\partial \phi}{\partial u^j} \mathbf{e}_j, \\
 \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{g^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 h_2 F_3) \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{F} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (h_2 F_2) \right) \mathbf{e}_1 + \\
 &+ \frac{1}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (h_3 F_3) \right) \mathbf{e}_2 + \\
 &+ \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 F_1) \right) \mathbf{e}_3.
 \end{aligned}$$

В системе координат (ψ, χ, φ) величина $(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)$ преобразуется в

$$(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) = \xi_{\psi} RB_{\chi} \frac{\partial p}{\partial \psi} = \xi_{\psi} RB_{\chi} p',$$

где штрих над p означает дифференцирование по ψ . Из формул (6.15), (6.16) гл. 6 получаем

$$-j_\varphi = Rp' + \frac{\widehat{I}\Gamma}{\mu_0 R}, \quad (\text{B.12})$$

$$p' = -\frac{j_\varphi}{R} - \frac{\widehat{I}\Gamma}{\mu_0 R^2}.$$

Заметим, что ψ , определенная в данном Приложении выражением (B.9), равна $-RA_\varphi$, в то время как в (6.15), (6.16) гл. 6 принято $\psi = RA_\varphi$. Комбинация $\nabla \cdot \xi$ выражается как

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} (JB_\chi R\xi_\psi) + \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{\xi_\chi}{B_\chi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{J\xi_\varphi}{R} \right) \right).$$

Удобно ввести

$$X \equiv RB_\chi \xi_\psi,$$

$$Y \equiv \frac{\xi_\chi}{B_\chi},$$

$$U \equiv \frac{1}{RB_\chi} (B_\chi \xi_\varphi - B_\varphi \xi_\chi) = \frac{\xi_\varphi}{R} - \frac{\widehat{I}}{R^2 B_\chi} \xi_\chi.$$

При этом

$$\xi_\psi = \frac{X}{RB_\chi},$$

$$\xi_\chi = B_\chi Y,$$

$$\xi_\varphi = RU + \frac{\widehat{I}}{R} Y$$

и

$$\xi \cdot \nabla p = Xp' = X \left(-\frac{j_\varphi}{R} - \frac{\widehat{I}\Gamma}{\mu_0 R^2} \right). \quad (\text{B.13})$$

Рассмотрим отдельную фурье-гармонику $\xi = \xi(\psi, \chi) \exp(in\varphi)$. Тогда

$$(Bik_{\parallel})Y \equiv \left(B_\chi \frac{1}{JB_\chi} \frac{\partial}{\partial \chi} + B_\varphi \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y = \left(\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\widehat{I}}{R^2} in \right) Y,$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \chi} Y = (Bik_{\parallel})Y - in \frac{\widehat{I}}{R^2} Y.$$

Так как

$$\nabla \cdot \xi = \frac{1}{J} (JX)' + iBk_{\parallel} Y + inU, \quad (\text{B.14})$$

$$(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p)(\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^*) = X \left(-\frac{j_\varphi}{R} - \frac{\widehat{I}'}{\mu_0 R^2} \right) \left(\frac{1}{J} (JX^*)' - iBk_{\parallel} Y^* - inU^* \right). \quad (\text{B.15})$$

Выведем выражение для \mathbf{B}_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}), \\ (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})_\psi &= \xi_\chi B_\varphi - \xi_\varphi B_\chi, \\ (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})_\chi &= -\xi_\psi B_\varphi, \\ (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B})_\varphi &= \xi_\psi B_\chi, \\ B_{1\psi} &= \frac{1}{JB_\chi R} \left(\frac{\partial X}{\partial \chi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{JB_\varphi}{R} X \right) \right) = \frac{1}{B_\chi R} iBk_{\parallel} X, \\ B_{1\chi} &= -B_\chi \left(inU + \frac{\partial X}{\partial \psi} \right), \\ B_{1\varphi} &= \frac{R}{J} \left(-\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{J\widehat{I}}{R^2} X \right) + \frac{\partial U}{\partial \chi} \right). \end{aligned}$$

Компоненты плотности тока

$$\begin{aligned} \mu_0 j_\psi &= 0, \\ \mu_0 j_\chi &= -B_\chi \frac{\partial}{\partial \psi} (RB_\varphi) = -B_\chi \widehat{I}', \\ \mu_0 j_\varphi &= \frac{R}{J} \frac{\partial}{\partial \psi} (JB_\chi^2), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

а

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_1 \times \boldsymbol{\xi}^*)_\chi &= \frac{R}{J} \frac{\partial U}{\partial \chi} \xi_\psi^* - \frac{R}{J} \left(\frac{IJ}{R^2} X \right)' \xi_\psi^* - \frac{iBk_{\parallel}}{B_\chi R} X \xi_\varphi^*, \\ (\mathbf{B}_1 \times \boldsymbol{\xi}^*)_\varphi &= \frac{iBk_{\parallel}}{B_\chi R} X \xi_\chi^* + (inU + X') B_\chi \xi_\psi^*. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_1) &= \mathbf{j} \cdot (\mathbf{B}_1 \times \boldsymbol{\xi}^*) = \\ &= -B_\chi \frac{\widehat{I}'}{\mu_0} \left(\frac{R}{J} \frac{\partial U}{\partial \chi} \xi_\psi^* - \frac{R}{J} \left(\frac{IJ}{R^2} X \right)' \xi_\psi^* - \frac{iBk_{\parallel}}{B_\chi R} X \xi_\varphi^* \right) + \\ &\quad + j_\varphi \left(\frac{iBk_{\parallel}}{B_\chi R} X \xi_\chi^* + (inU + X') B_\chi \xi_\psi^* \right) = \\ &= \frac{iBk_{\parallel}}{R} X \left(Y^* j_\varphi + \frac{\widehat{I}'}{\mu_0} (RU^* + \frac{\widehat{I}}{R} Y^*) \right) + \frac{\widehat{I}'}{\mu_0 J} \left(\frac{IJ}{R^2} X \right)' X^* - \\ &\quad - \frac{\widehat{I}'}{\mu_0 J} \frac{\partial U}{\partial \chi} X^* + inUX^* \frac{1}{R} j_\varphi + X' X^* \frac{1}{R} j_\varphi \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& (\nabla \cdot \xi^*)(\xi \cdot \nabla p) - (\xi^* \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{B}_1 = \\
& = \left(-\frac{j_\varphi}{R} - \frac{\widehat{\Gamma}'}{\mu_0 R^2} \right) (X X^* + X' X^*) + \frac{j_\varphi}{R} (in X U^* - in X^* U) + \\
& \quad + in \frac{\widehat{\Gamma}}{R^2} X U^* \frac{\widehat{\Gamma}'}{\mu_0} + i B k_{\parallel} X U^* \frac{\widehat{\Gamma}'}{\mu_0} + \frac{1}{J} \frac{\partial U}{\partial \chi} X^* \frac{\widehat{\Gamma}'}{\mu_0} + \\
& \quad + X X^* \left(-\frac{J' j_\varphi}{J R} - \frac{\widehat{\Gamma}'^2}{\mu_0 R^2} + \frac{\widehat{\Gamma} \widehat{\Gamma}'}{\mu_0 R^2} 2 \frac{R'}{R} - 2 \frac{\widehat{\Gamma} \widehat{\Gamma}'}{\mu_0 R^2} \frac{J'}{J} \right), \quad (\text{B.17})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|B_{1\varphi}|^2}{\mu_0} &= \frac{R^2}{\mu_0 J^2} \left| \frac{\partial U}{\partial \chi} - I \left(\frac{JX}{R^2} \right)' - \frac{JX}{R^2} \widehat{\Gamma}' \right|^2 = \\
&= \frac{R^2}{\mu_0 J^2} \left| \frac{\partial U}{\partial \chi} - I \left(\frac{JX}{R^2} \right)' \right|^2 - \frac{\widehat{\Gamma}'}{\mu_0 J} \left(\frac{\partial U}{\partial \chi} X^* + \frac{\partial U^*}{\partial \chi} X \right) + \\
&+ \frac{\widehat{\Gamma} \widehat{\Gamma}'}{\mu_0 R^2} (X' X^* + X^* X) + 2 \frac{\widehat{\Gamma} \widehat{\Gamma}'}{\mu_0 J} \left(\frac{J'}{R^2} - \frac{2R'}{R^3} J \right) X X^* + \frac{\widehat{\Gamma}'^2}{\mu_0 R^2} X X^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|B_{1\chi}|^2}{\mu_0} &= \frac{B\chi^2}{\mu_0} |inU + X'|^2 = \\
&= \frac{B\chi^2}{\mu_0} \left| inU + X' - \frac{\mu_0 j_\varphi}{R B_\chi^2} X \right|^2 + (inU X^* - inU^* X) \frac{j_\varphi}{R} + \\
& \quad + (X' X^* + X^* X) \frac{j_\varphi}{R} - \frac{\mu_0 j_\varphi^2}{R^2 B_\chi^2} X X^*.
\end{aligned}$$

В итоге интеграл энергии для осесимметричных тороидальных систем приобретает вид

$$\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2} \int_V \left(\frac{|B_1|^2}{\mu_0} + \gamma p |(\nabla \cdot \xi)|^2 + (\nabla \cdot \xi^*)(\xi \cdot \nabla p) - \xi^* \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}_1) \right) dr = \\
&= \int_V \left(\frac{1}{2\mu_0} \frac{B^2 k_{\parallel}^2}{B_\chi^2 R^2} |X|^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{R^2}{J^2} \left| \frac{\partial U}{\partial \chi} - I \left(\frac{JX}{R^2} \right)' \right|^2 + \right. \\
&+ \frac{B_\chi^2}{2\mu_0} \left| inU + X' - \frac{\mu_0 j_\varphi}{R B_\chi^2} X \right|^2 + \frac{1}{2} \gamma p \left| \frac{1}{J} (JX)' + i B k_{\parallel} Y + inU \right|^2 - \\
& \quad \left. - K X X^* \right) J d\psi d\chi d\varphi, \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

где

$$K \equiv \frac{\widehat{I}\Gamma'}{\mu_0 R^2} \frac{R'}{R} + \frac{j_\varphi}{2R} \left(\frac{J'}{J} + \frac{\mu_0 j_\varphi}{R B_\chi^2} \right) = \frac{\widehat{I}\Gamma'}{\mu_0 R^2} \frac{R'}{R} + \frac{j_\varphi}{R} \left(\frac{J'}{J} + \frac{B'_\chi}{B_\chi} \right),$$

поскольку согласно (В.16)

$$\mu_0 j_\varphi = \frac{R}{J} (J' B_\chi^2 + J 2 B_\chi B'_\chi).$$

§ В.3. Интеграл энергии для баллонных мод с высокими значениями n

Интеграл энергии в форме (В.18) был применен для анализа устойчивости возмущений с высокими значениями n и баллонных мод [3, 4].

Первый шаг в минимизации δW состоит в выборе Y таким образом, чтобы занулить в (В.18) член со сжимаемостью ($\nabla \times \xi = 0$). Второй шаг заключается в минимизации относительно U . При рассмотрении баллонных мод важны возмущения с большими значениями тороидального волнового числа n и с $|m - \widehat{q}n| \ll n$ (см. разд. 8.5). После длинных математических манипуляций интеграл энергии с точностью $O(1/n)$ записывается в виде [3]

$$W = \frac{\pi}{\mu_0} \int d\psi d\chi \left(\frac{J B^2}{R^2 B_\chi^2} |k_{\parallel} X|^2 + \frac{R^2 B_\chi^2}{J B^2} \left| \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \psi} (J B k_{\parallel} X) \right|^2 - \right. \\ \left. - \frac{2J\mu_0 p'}{B^2} \left(|X|^2 \frac{\partial}{\partial \psi} (\mu_0 p + \frac{B^2}{2}) - \frac{i\widehat{I}}{J B^2} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{B^2}{2} \right) \frac{X^* \partial X}{n \partial \psi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{X^*}{n} J B k_{\parallel} (X \sigma') - \frac{1}{n} (P^* J B k_{\parallel} Q + \text{c.c.}) \right), \quad (\text{В.19})$$

где

$$P = X \sigma - \frac{B_\chi^2}{\widehat{q} B^2} \frac{I}{n} \frac{\partial}{\partial \psi} (J B k_{\parallel} X), \\ Q = \frac{X \mu_0 p'}{B^2} + \frac{\widehat{I}^2}{\widehat{q}^2 R^2 B^2} \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \psi} (J B k_{\parallel} X), \\ \sigma = \frac{\widehat{I} \mu_0 p'}{B^2} + \widehat{I}', \\ i J k_{\parallel} B = \frac{\partial}{\partial \chi} + i n \widehat{q}, \quad \widehat{q}(\psi, \chi) = \frac{\widehat{I} J}{R^2}.$$

Величина δW должна быть минимизирована по отношению ко всем периодическим функциям X с подходящей нормой,

$$\pi \int J d\psi d\chi \rho_m \left(\frac{|X|^2}{R^2 B_\chi^2} + \left(\frac{R B_\chi}{B} \right)^2 \left| \frac{1}{n} \frac{\partial X}{\partial \psi} \right|^2 \right) = \text{const}, \quad (\text{B.20})$$

где ρ_m — плотность. Интеграл (B.20) отвечает кинетической энергии движения, перпендикулярного к силовой линии.

Уравнение Эйлера для минимизирующей функции $X(\psi, \chi)$ может быть выведено из (B.19) и (B.20). Поскольку $X(\psi, \chi)$ периодична по χ , ее можно разложить в ряд Фурье,

$$X(\psi, \chi) = \sum_m X_m(\psi) \exp(im\chi).$$

Введем, используя представление в виде интеграла Фурье, непрерывную функцию $X_s(\psi)$, которая совпадает с $X_m(\psi)$ для целых $s = m$:

$$X_s(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(\psi, y) \exp(isy) dy / 2\pi,$$

$$\hat{X}(\psi, y) \int_{-\infty}^{\infty} X_s(\psi) \exp(-isy) dy.$$

Величину $\hat{X}(\psi, y)$ называют баллонным представлением $X(\psi, \chi)$. Тогда $X(\psi, \chi)$ представляется как

$$X(\psi, \chi) = \sum_m \exp(-im\chi) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(\psi, y) \exp(imy) dy / 2\pi. \quad (\text{B.21})$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \sum_m \exp(-im(\chi - y)) = \sum_N \delta(y - \chi + 2\pi N)$$

$\delta(x)$ — дельта-функция), то связь $X(\psi, \chi)$ и $\hat{X}(\psi, y)$ такова:

$$X(\psi, \chi) = \sum_N \hat{X}(\psi, \chi - 2\pi N). \quad (\text{B.22})$$

Величина $X(\psi, \chi)$ выражена бесконечной суммой квази-мод.

Уравнение Эйлера для $X(\psi, \chi)$ преобразуется в идентичное уравнение для $\hat{X}(\psi, y)$ с той лишь разницей, что \hat{X} определена

на бесконечной области значений y и к ней не предъявляется требование периодичности. Рассмотрим $\widehat{X}(\psi, y)$ в форме

$$\widehat{X}(\psi, y) = F(\psi, y) \exp(-in \int_{y_0}^y \widehat{q} dy), \quad (\text{B.23})$$

в которой амплитуда $F(\psi, y)$ является при $n \rightarrow \infty$ медленно меняющейся функцией. Тогда

$$iJk_{\parallel} B \widehat{X}(\psi, y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} + in\widehat{q} \right) \widehat{X}(\psi, y) = \frac{\partial F(\psi, y)}{\partial y} \exp(-in \int_{y_0}^y \widehat{q} dy).$$

Главный член уравнения Эйлера для $\widehat{X}(\psi, y)$ принимает вид [3]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{JR^2 B_{\chi}^2} \left(1 + \left(\frac{R^2 B_{\chi}^2}{B} \int_{y_0}^y \widehat{q}' dy \right)^2 \right) \frac{\partial F_0}{\partial y} \right) + \\ & + \left(\frac{2\mu_0 p'}{B^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\mu_0 p + \frac{B^2}{2} \right) - \frac{\widehat{I} \mu_0 p'}{B^4} \left(\int_{y_0}^y \widehat{q}' dy \right) \frac{1}{J} \frac{\partial B^2}{\partial y} \right) F_0 + \\ & + \frac{\omega^2(\psi, y_0)}{R^2 B_{\chi}^2} \left(1 + \left(\frac{R^2 B_{\chi}^2}{B} \int_{y_0}^y \widehat{q}' dy \right)^2 \right) F_0 = 0. \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

Это уравнение используется для анализа устойчивости баллонных мод [4] (см. разд. 8.5).

Список литературы

1. *Greene J.M., Johnson J.L.* Plasma Phys. 1968. V. 10. P. 729.
2. *Bateman G.* MHD Instabilities. — The MIT Press, 1978 (русский перевод: *Бейтман Дж.* МГД-неустойчивости. — М.: Энергоатомиздат, 1982)
3. *Connor J.W., Hastie R.J., Taylor J.B.* Proc. Roy. Soc. 1979. V. A365. P. 1.
4. *Connor J.W., Hastie R.J., Taylor J.B.* Phys. Rev.Lett. 1978. V. 40. P. 396.

Приложение С

ВЫВОД ТЕНЗОРА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ГОРЯЧЕЙ ПЛАЗМЫ

§ С.1. Дисперсионное уравнение для горячей плазмы

В гл. 10 было получено дисперсионное соотношение для холодной плазмы. В невозмущенном состоянии в холодной плазме электроны и ионы неподвижны. В то же время в горячей плазме даже в невозмущенном состоянии электроны и ионы движутся по винтовым траекториям. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$ можно описать уравнениями

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt'} = \mathbf{v}', \quad \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} = \frac{q}{m} \mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0. \quad (\text{C.1})$$

Принимая, что при $t' = t$ начальные значения $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, $\mathbf{v}' = \mathbf{v} = (v_\perp \cos \theta, v_\perp \sin \theta, v_z)$, получим решение уравнения (C.1) в виде

$$\begin{aligned} v'_x(t') &= v_\perp \cos(\theta + \Omega(t' - t)), \\ v'_y(t') &= v_\perp \sin(\theta + \Omega(t' - t)), \\ v'_z(t') &= v_z, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} x'(t') &= x + \frac{v_\perp}{\Omega} (\sin(\theta + \Omega(t' - t)) - \sin \theta), \\ y'(t') &= y - \frac{v_\perp}{\Omega} (\cos(\theta + \Omega(t' - t)) - \cos \theta), \\ z'(t') &= z + v_z(t' - t), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

где $\Omega = -qB_0/m$ и $v_x = v_\perp \cos \theta$, $v_y = v_\perp \sin \theta$. Анализ поведения этой системы под воздействием возмущения основывается на уравнении Больцмана. Функция распределения частиц сорта k определяется системой уравнений

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_k + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_k = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_k d\mathbf{v}, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_k d\mathbf{v}, \quad (\text{C.6})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{C.7})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (\text{C.8})$$

Нулевое приближение, т. е. невозмущенное состояние, обозначается, как обычно, индексом 0, а первое приближение — индексом 1. Члены первого порядка пропорциональны $\exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$. Используя представление

$$f_k = f_{k0}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + f_{k1}, \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{E} = 0 + \mathbf{E}_1, \quad (\text{C.11})$$

можно линеаризовать уравнения (C.4)–(C.8):

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{k0} + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k0} = 0, \quad (\text{C.12})$$

$$\sum_k q_k \int f_{k0} d\mathbf{v} = 0, \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_0 = \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_{k0} d\mathbf{v} = \mathbf{j}_0, \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{k1}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f_{k1} + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k1} = \\ = -\frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{k0}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k q_k \int f_{k1} d\mathbf{v}, \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{k} \times \mathbf{B}_1 = -\omega \left(\epsilon_0 \mathbf{E}_1 + \frac{i}{\omega} \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_{k1} d\mathbf{v} \right), \quad (\text{C.17})$$

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1). \quad (\text{C.18})$$

Принимая во внимание (C.18), замечаем, что правая часть (C.15) линейна по \mathbf{E}_1 , так что f_{k1} также будет линейной функцией \mathbf{E}_1 .

Тензор диэлектрической проницаемости горячей плазмы, обозначаемый \mathbf{K} ($\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}$), определим как

$$\mathbf{E}_1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \mathbf{j} = \mathbf{E}_1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sum_k q_k \int \mathbf{v} f_{k1} d\mathbf{v} \equiv \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_1. \quad (\text{C.19})$$

Если из (C.15) можно найти f_{k1} , то можно рассчитать и \mathbf{K} . Из уравнений (C.17), (C.18) находим для \mathbf{E}_1 линейное соотношение

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_1 = 0. \quad (\text{C.20})$$

Закон дисперсии получается приравниванием нулю определителя системы линейных уравнений: см. (10.19), (10.20). Как и в случае холодной плазмы, волновые свойства горячей плазмы могут быть получены из дисперсионного уравнения.

§ С.2. Решение линеаризованного уравнения Власова

Интегрированием правой части (C.15) по времени вдоль невозмущенной траектории частицы (C.2), (C.3) находим

$$f_{k1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{q_k}{m_k} \int_{-\infty}^t \left(\mathbf{E}_1(\mathbf{r}'(t'), t') + \frac{1}{\omega} \mathbf{v}'(t') \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1(\mathbf{r}'(t'), t')) \right) \cdot \nabla'_v f_{k0}(\mathbf{r}'(t'), \mathbf{v}'(t')) dt'. \quad (\text{C.21})$$

Подстановка (C.21) в (C.15) дает

$$\begin{aligned} & -\frac{q_k}{m_k} \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{\omega} \mathbf{v} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_1) \right) \cdot \nabla_v f_{k0} - \\ & -\frac{q_k}{m_k} \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r + \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_v \right) \times \\ & \quad \times [\text{подынтегр. выраж. из (C.21)}] dt' = \\ & = -\frac{q_k}{m_k} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1) \cdot \nabla_v f_{k0}. \quad (\text{C.22}) \end{aligned}$$

Если доказать, что второе слагаемое левой части уравнения (C.22) обращается в нуль, то (C.21) действительно будет решением (C.15). Заменяем, используя (C.2) и (C.3), переменные $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

на $(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t')$. Тогда дифференциальные операторы во втором слагаемом левой части уравнения (С.22) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial t} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} \cdot \nabla'_{\mathbf{v}'} = \\ &= \frac{\partial(t' - t)}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial(t' - t)} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial(t' - t)} \cdot \nabla'_{\mathbf{v}'} \right) = \\ &= -\mathbf{v}' \cdot \nabla'_{\mathbf{r}'} - \frac{q_k}{m_k} (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla'_{\mathbf{v}'}, \\ \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}'}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_x} &= \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial v_x} \cdot \nabla'_{\mathbf{r}'} + \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial v_x} \cdot \nabla'_{\mathbf{v}'} = \\ &= \frac{1}{\Omega} \left(\sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial x'} + [-\cos \Omega(t' - t) + 1] \frac{\partial}{\partial y'} \right) + \\ &\quad + \left(\cos \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_x} + \sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_y} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_y} &= \frac{1}{\Omega} \left((\cos \Omega(t' - t) - 1) \frac{\partial}{\partial x'} + \sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial y'} \right) + \\ &\quad + \left(-\sin \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_x} + \cos \Omega(t' - t) \frac{\partial}{\partial v'_y} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} &= -\Omega \left(v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) = \\ &= v'_x \frac{\partial}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial}{\partial y'} - \left(v_x \frac{\partial}{\partial x'} + v_y \frac{\partial}{\partial y'} \right) - \Omega \left(v'_y \frac{\partial}{\partial v'_x} - v'_x \frac{\partial}{\partial v'_y} \right) = \\ &= (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \cdot \nabla'_{\mathbf{r}'} + \frac{q}{m} (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla'_{\mathbf{v}'}. \end{aligned}$$

Следовательно, второе слагаемое в левой части (С.22) действительно равно нулю.

Так как члены первого порядка $\sim \exp(-i\omega t)$, то интеграл (С.21) сходится, когда мнимая часть ω больше нуля. Если мнимая часть ω отрицательна, то решение может быть получено аналитическим продолжением из области положительной мнимой части частоты.

§ С.3. Тензор диэлектрической проницаемости горячей плазмы

Нулевое приближение функции распределения f_0 должно удовлетворять уравнению (С.12) или, что то же самое,

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(v_\perp, v_z), \quad v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Рассмотрим случай

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}', t') = \mathbf{E} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - \omega t').$$

Ось z направлена вдоль \mathbf{B}_0 , а ось x лежит в плоскости, образованной вектором \mathbf{B}_0 и волновым вектором \mathbf{k} , так что y -компонента волнового вектора равна нулю ($k_y = 0$):

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_z \hat{\mathbf{z}}.$$

Тогда (С.21) преобразуется к

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & -\frac{q}{m} \exp i(k_x x + k_z z - \omega t) \times \\ & \times \int_{-\infty}^t \left(\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega} \right) \mathbf{E} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}) \frac{\mathbf{k}}{\omega} \right) \cdot \nabla'_{\mathbf{v}'} f_0 \times \\ & \times \exp \left(i \frac{k_x v_\perp}{\omega} \sin(\theta + \Omega(t' - t)) - i \frac{k_x v_\perp}{\Omega} \sin \theta + \right. \\ & \left. + i(k_z v_z - \omega)(t' - t) \right) dt'. \end{aligned}$$

Введем переменную $\tau = t' - t$ и используем следующие соотношения для функций Бесселя:

$$\begin{aligned} \exp(ia \sin \theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \exp im\theta, \\ J_{-m}(a) &= (-1)^m J_m(a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(\dots) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m \exp(-im\theta) J_n \exp(in(\theta + \Omega\tau)) \times \\ & \times \exp i(k_z v_z - \omega)\tau. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}
 & \left(\left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}'}{\omega} \right) \mathbf{E} + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{E}) \frac{\mathbf{k}}{\omega} \right) \cdot \nabla'_{\mathbf{v}} f_0 = \\
 & = \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \left(\left(1 - \frac{k_x v'_x}{\omega} \right) E_z + (v'_x E_x + v'_y E_y) \frac{k_z}{\omega} \right) + \\
 & + \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \left(\left(1 - \frac{k_z v'_z}{\omega} \right) \left(E_x \frac{v'_x}{v_{\perp}} + E_y \frac{v'_y}{v_{\perp}} \right) + v_z E_z \frac{k_x v'_x}{\omega v_{\perp}} \right) = \\
 & = \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \frac{k_z v_{\perp}}{\omega} \right) \left(\frac{E_x}{2} (e^{i(\theta+\Omega\tau)} + e^{-i(\theta+\Omega\tau)}) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{E_y}{2i} (e^{i(\theta+\Omega\tau)} - e^{-i(\theta+\Omega\tau)}) \right) + \\
 & + \left(\frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \frac{k_x v_z}{\omega} - \frac{\partial f_0}{\partial v_z} \frac{k_x v_{\perp}}{\omega} \right) \frac{E_z}{2} (e^{i(\theta+\Omega\tau)} + e^{-i(\theta+\Omega\tau)}) + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} E_z,
 \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & -\frac{q}{m} \exp i(k_x x + k_z z - \omega t) \times \\
 & \times \sum_{mn} \left(U \left(\frac{J_{n-1} + J_{n+1}}{2} \right) E_x - iU \left(\frac{J_{n-1} - J_{n+1}}{2} \right) E_y + \right. \\
 & \left. + \left(W \frac{J_{n-1} + J_{n+1}}{2} + \frac{\partial f_0}{\partial v_z} J_n \right) E_z \right) \cdot \frac{J_m(a) \exp(-i(m-n)\theta)}{i(k_z v_z - \omega + n\Omega)},
 \end{aligned}$$

где

$$U = \left(1 - \frac{k_z v_z}{\omega} \right) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_z v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \quad (\text{C.23})$$

$$W = \frac{k_x v_z}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} - \frac{k_x v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \quad (\text{C.24})$$

$$a = \frac{k_x v_{\perp}}{\Omega}, \quad \Omega = \frac{-qB}{m}, \quad (\text{C.25})$$

и

$$\frac{J_{n-1}(a) + J_{n+1}(a)}{2} = \frac{nJ_n(a)}{a}, \quad \frac{J_{n-1}(a) - J_{n+1}(a)}{2} = \frac{d}{da} J_n(a).$$

Поскольку f_1 получена в явном виде, то (С.19) удобно переписать как

$$(\mathbf{K} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E} = \frac{i}{\epsilon_0 \omega} \sum_j q_j \int \mathbf{v} f_{j1} d\mathbf{v}. \quad (\text{C.26})$$

Так как $v_x = v_{\perp} \cos \theta$, $v_y = v_{\perp} \sin \theta$, $v_z = v_z$, то в x - и y -компоненты интеграла (С.26) могут дать вклад только члены

с $e^{i(m-n)\theta} = e^{\pm i\theta}$ в f_{j1} , а в z -компоненту могут дать вклад только члены с $e^{i(m-n)\theta} = 1$, и мы получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} - \sum_j \frac{\Pi_j^2}{\omega n_{j0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mathbf{v} \frac{S_{jn}}{k_z v_z - \omega + n\Omega_j}, \quad (\text{C.27})$$

$$S_{jn} = \begin{bmatrix} v_{\perp} (n \frac{J_n}{a})^2 U & -i v_{\perp} (n \frac{J_n}{a}) J'_n U & v_{\perp} (n \frac{J_n}{a}) J_n (\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n}{a} W) \\ i v_{\perp} J'_n (n \frac{J_n}{a}) U & v_{\perp} (J'_n)^2 U & i v_{\perp} J'_n J_n (\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n}{a} W) \\ v_z J_n (n \frac{J_n}{a}) U & -i v_{\perp} J_n J'_n U & v_z J_n^2 (\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n}{a} W) \end{bmatrix},$$

где

$$\Pi_j^2 = \frac{n_j q_j^2}{\epsilon_0 m_j}.$$

Если использовать соотношения

$$\frac{v_z U - v_{\perp} (\frac{\partial f_0}{\partial v_z} + \frac{n\Omega}{k_x v_{\perp}} W)}{k_z v_z - \omega + n\Omega} = -\frac{v_z}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + \frac{v_{\perp}}{\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v_z},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2 = 1, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n J'_n = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n J_n^2 = 0 \quad (J_{-n} = (-1)^n J_n)$$

и заменить n на $-n$, то выражение (C.27) преобразуется к виду

$$\mathbf{K} = \mathbf{I} - \sum_j \frac{\Pi_j^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int T_{jn} \frac{v_{\perp}^{-1} U_j n_{j0}^{-1}}{k_z v_z - \omega - n\Omega_j} d\mathbf{v} -$$

$$- \mathbf{L} \sum_j \frac{\Pi_j^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{1}{n_{j0}} \int \frac{v_z^2}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_{\perp}} d\mathbf{v} \right),$$

$$T_{jn} = \begin{bmatrix} v_{\perp}^2 (n \frac{J_n}{a}) (n \frac{J_n}{a}) & i v_{\perp}^2 (n \frac{J_n}{a}) J'_n & -v_{\perp} v_z (n \frac{J_n}{a}) J_n \\ -i v_{\perp}^2 J'_n (n \frac{J_n}{a}) & v_{\perp}^2 J'_n J'_n & i v_{\perp} v_z J'_n J_n \\ -v_{\perp} v_z J_n (n \frac{J_n}{a}) & -i v_{\perp} v_z J_n J'_n & v_z^2 J_n J_n \end{bmatrix},$$

где все компоненты матрицы \mathbf{L} равны нулю, за исключением $L_{zz} = 1$. Из соотношений

$$\frac{U_j}{k_z v_z - \omega - n\Omega_j} =$$

$$= -\frac{1}{\omega} \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_{\perp}} + \frac{1}{\omega(k_z v_z - \omega - n\Omega_j)} \left(-n\Omega_j \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_{\perp}} + k_z v_{\perp} \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_z} \right),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (J'_n)^2 = \frac{1}{2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 J_n^2(a)}{a^2} = \frac{1}{2}$$

можно получить другое выражение для тензора диэлектрической проницаемости:

$$\mathbf{K} = \left(1 - \frac{\Pi_j^2}{\omega^2}\right) \mathbf{I} - \sum_{j,n} \frac{\Pi_j^2}{\omega^2} \int \frac{T_{jn}}{k_z v_z - \omega - n\Omega_j} \left(\frac{-n\Omega_j}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial f_{j0}}{\partial v_z} \right) \frac{1}{n_{j0}} dv. \quad (\text{C.28})$$

Используя

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\mathbf{k}}{\omega} c,$$

получаем дисперсионное уравнение (С.20) в следующем виде:

$$(K_{xx} - N_{\parallel}^2) E_x + K_{xy} E_y + (K_{xz} + N_{\perp} N_{\parallel}) E_z = 0,$$

$$K_{yx} E_x + (K_{yy} - N^2) E_y + K_{yz} E_z = 0,$$

$$(K_{zx} + N_{\perp} N_{\parallel}) E_x + K_{zy} E_y + (K_{zz} - N_{\perp}^2) E_z = 0.$$

Здесь N_{\parallel} — z -компонента \mathbf{N} (параллельная \mathbf{B}), а N_{\perp} — x -компонента \mathbf{N} (перпендикулярная \mathbf{B}). Дисперсионное уравнение получается приравниванием детерминанта матрицы коэффициентов нулю.

§ С.4. Тензор диэлектрической проницаемости би-максвелловской плазмы

Если в нулевом приближении функция распределения би-максвелловская,

$$f_0(v_{\perp}, v_z) = n_0 F_{\perp}(v_{\perp}) F_z(v_z), \quad (\text{C.29})$$

$$F_{\perp}(v_{\perp}) = \frac{m}{2\pi\kappa T_{\perp}} \exp\left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2\kappa T_{\perp}}\right), \quad (\text{C.30})$$

$$F_z(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi\kappa T_z}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m(v_z - V)^2}{2\kappa T_z}\right), \quad (\text{C.31})$$

то

$$\left(-\frac{n\Omega_j}{v_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} + k_z \frac{\partial f_0}{\partial v_z}\right) \frac{1}{n_0} = m \left(\frac{n\Omega_j}{\kappa T_{\perp}} - \frac{k_z(v_z - V)}{\kappa T_z}\right) F_{\perp}(v_{\perp}) F_z(v_z).$$

Интегрирование по v_z можно провести, используя *плазменную дисперсионную функцию* $Z(\zeta)$, которая по определению есть

$$Z(\zeta) \equiv \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\beta^2)}{\beta - \zeta} d\beta. \quad (\text{C.32})$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= \frac{1}{\omega_n} \zeta_n Z(\zeta_n), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z(v_z - V)F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= 1 + \zeta_n Z(\zeta_n), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_z(v_z - V))^2 F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= \omega_n (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)), \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(k_z(v_z - V))^3 F_z}{k_z(v_z - V) - \omega_n} dv_z &= \frac{k_z^2(\kappa T_z)}{m} + \omega_n^2 (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)), \end{aligned}$$

$$\omega_n \equiv \omega - k_z V + n\Omega,$$

$$\zeta_n \equiv \frac{\omega - k_z V + n\Omega}{k_z(2\kappa T_z/m)^{1/2}},$$

$$\int_0^{\infty} J_n^2(b^{1/2}x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right) x dx = \alpha I_n(\alpha b) e^{-b\alpha},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) = e^b, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n I_n(b) = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 I_n(b) = be^b,$$

(где $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя), получим формулу для тензора диэлектрической проницаемости би-максвелловской плазмы в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \mathbf{I} + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left(\sum_n (\zeta_0 Z(\zeta_n) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{1}{\lambda_T}\right) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n))) e^{-b} \mathbf{X}_n + 2\eta_0^2 \lambda_T \mathbf{L} \right), \quad (\text{C.33}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{X}_n = \begin{bmatrix} n^2 I_n / b & in(I'_n - I_n) & -(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{\alpha} I_n \\ -in(I'_n - I_n) & (n^2/b + 2b)I_n - 2bI'_n & i(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \alpha (I'_n - I_n) \\ -(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{\alpha} I_n & -i(2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \alpha (I'_n - I_n) & 2\lambda_T \eta_n^2 I_n \end{bmatrix}, \quad (\text{С.34})$$

$$\eta_n \equiv \frac{\omega + n\Omega}{2^{1/2} k_z v_{Tz}}, \quad \lambda_T \equiv \frac{T_z}{T_\perp}, \quad b \equiv \left(\frac{k_x v_{T\perp}}{\Omega} \right)^2, \\ \alpha \equiv \frac{k_x v_{T\perp}}{\Omega}, \quad v_{Tz}^2 \equiv \frac{\kappa T_z}{m}, \quad v_{T\perp}^2 \equiv \frac{\kappa T_\perp}{m}.$$

Все матричные элементы \mathbf{L} равны нулю, за исключением $L_{zz} = 1$.

§ С.5. Закон дисперсии электростатических волн

Если электрическое поле \mathbf{E} волны задается электростатическим потенциалом ϕ :

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi,$$

то такие волны называются электростатическими. В этом параграфе обсуждается дисперсионное соотношение для электростатических волн в горячей плазме. Поскольку $\partial\mathbf{V}_1/\partial t = \nabla \times \mathbf{E}$ и

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega = 0,$$

то дисперсионное соотношение преобразуется от (10.92) к виду

$$k_x^2 K_{xx} + 2k_x k_z K_{xz} + k_z^2 K_{zz} = 0. \quad (\text{С.35})$$

Подставив \mathbf{K} , определенное выражением (С.33), в (С.35), найдем

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left[k_z^2 2\eta_0^2 \lambda_T + \right. \\ \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{n^2 I_n}{b} k_x^2 - (2\lambda_T)^{1/2} \eta_n \frac{n}{b^{1/2}} I_n 2k_x k_z + 2\lambda_T \eta_n^2 I_n k_z^2 \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\eta_0 Z(\zeta_n) - \left(1 - \frac{1}{\lambda_T} \right) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) e^{-b} \right] = 0,$$

где

$$\omega_n \equiv \omega - k_z V + n\Omega, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) = e^b,$$

$$\zeta_n = \frac{\omega_n}{2^{1/2} k_z v_{Tz}}, \quad \lambda_T = \frac{T_z}{T_\perp},$$

$$\eta_n = \frac{\omega + n\Omega}{2^{1/2} k_z v_{Tz}}, \quad b = \left(\frac{k_x v_{T\perp}}{\Omega} \right)^2,$$

или иначе,

$$\begin{aligned}
 k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \frac{\Pi^2}{\omega^2} \left(\frac{m\omega^2}{\kappa T_{\perp}} + \right. \\
 \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m\omega^2}{\kappa T_{\perp}} I_n \left(\zeta_0 Z(\zeta_n) - \left(1 - \frac{1}{\lambda_T} \right) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) e^{-b} \right) = 0, \\
 k_x^2 + k_z^2 + \sum_{i,e} \Pi^2 \frac{m}{\kappa T_z} \left(1 + \right. \\
 \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{T_z}{T_{\perp}} \left(\frac{-n\Omega}{\omega_n} \right) \right) \zeta_n Z(\zeta_n) I_n e^{-b} \right) = 0. \quad (C.36)
 \end{aligned}$$

§ С.6. Закон дисперсии электростатических волн в неоднородной плазме

Уравнение (С.36) является дисперсионным уравнением для электростатической волны в однородной би-максвелловской плазме. В том случае, когда плотность и температура в нулевом приближении изменяются вдоль оси y , необходимо обратиться к (С.5), (С.21), тогда можно записать

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}_1 = 0, \\
 -\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_k q_k \int f_{k1} d\mathbf{v}, \quad (C.37)
 \end{aligned}$$

$$f_{k1} = \frac{q_k}{m_k} \int_{-\infty}^t \nabla'_r \phi_1(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla'_v f_{k0}(\mathbf{r}', \mathbf{v}') dt'. \quad (C.38)$$

Функция распределения в нулевом приближении f_{k0} должна удовлетворять уравнению (С.12), или

$$v_y \frac{\partial f_0}{\partial y} - \Omega \left(v_y \frac{\partial}{\partial v_x} - v_x \frac{\partial}{\partial v_y} \right) f_0 = 0.$$

Инвариантами движения частиц являются $\alpha = v_{\perp}^2$, $\beta = (v_z - V)^2$, $\gamma = y + v_x/\Omega$. Функция распределения $f_0(\alpha, \beta, \gamma)$ нулевого приближения, удовлетворяющая уравнению (С.12), выглядит так:

$$f_0 \left(v_{\perp}^2, (v_z - V)^2, y + \frac{v_x}{\Omega} \right) =$$

$$= n_0 \left(1 + \left(-\epsilon + \delta_{\perp} \frac{v_{\perp}^2}{2v_{T\perp}^2} + \delta_z \frac{(v_z - V)^2}{2v_{Tz}^2} \right) \left(y + \frac{v_x}{\Omega} \right) \right) \times \\ \times \left(\frac{1}{2\pi v_{T\perp}^2} \right) \left(\frac{1}{2\pi v_{Tz}^2} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{v_{\perp}^2}{2v_{T\perp}^2} - \frac{(v_z - V)^2}{2v_{Tz}^2} \right). \quad (\text{C.39})$$

Градиенты плотности и температуры для этой функции распределения следующие:

$$\frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dy} = -\epsilon + \delta_{\perp} + \frac{\delta_z}{2}, \\ \frac{1}{T_{\perp}} \frac{dT_{\perp}}{dy} = \delta_{\perp}, \\ \frac{1}{T_z} \frac{dT_z}{dy} = \delta_z.$$

Рассмотрим возмущение

$$\phi_1(\mathbf{r}, t) = \phi_1(y) \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t).$$

Для такого возмущения подинтегральное выражение принимает вид

$$\nabla'_{\mathbf{r}} \phi_1 \cdot \nabla'_{\mathbf{v}} f_0 = (\mathbf{v}' \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \phi_1) 2 \frac{\partial f_0}{\partial \alpha'} + \\ + \left(2ik_z (v'_z - V) \frac{\partial f_0}{\partial \beta'} - 2ik_z v'_z \frac{\partial f_0}{\partial \alpha'} + \frac{ik_x}{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma'} \right) \phi_1.$$

Используя

$$\frac{d\phi_1}{dt'} = \frac{\partial \phi_1}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \phi_1) = -i\omega \phi_1 + \mathbf{v}' \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \phi_1, \\ \int_{-\infty}^t \mathbf{v}' \cdot \nabla'_{\mathbf{r}} \phi_1 dt' = \phi_1 + i\omega \int_{-\infty}^t \phi_1 dt', \\ \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma,$$

находим

$$f_1 = \frac{q}{m} \left(2 \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} \phi_1 + \right. \\ \left. + \left(2i\omega \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} + 2ik_z (v_z - V) \frac{\partial f_0}{\partial \beta} - 2ik_z v_z \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} + \frac{ik_x}{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \right) \times \right. \\ \left. \times \int_{-\infty}^t \phi_1(y') \exp(ik_x x' + ik_z z' - i\omega t') dt' \right) \quad (\text{C.40})$$

и

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^t \phi(\mathbf{r}', t') dt' &= \int_{-\infty}^t \phi_1(y') \exp(ik_x x' + ik_z z' - i\omega t') dt' = \\
&= \phi_1(y) \exp(ik_x x + ik_z z - i\omega t) \exp\left(-i \frac{k_x v_{\perp}}{\Omega} \sin \theta\right) \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{ik_x v_{\perp}}{\Omega} \sin(\theta + \Omega\tau) + i(k_z v_z - \omega)\tau\right) d\tau. \quad (\text{C.41})
\end{aligned}$$

Используя разложение

$$\begin{aligned}
\exp(ia \sin \theta) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(a) \exp im\theta, \\
J_{-m}(a) &= (-1)^m J_m(a),
\end{aligned}$$

запишем интеграл как

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^t \phi_1(\mathbf{r}', t') dt' &= \phi_1(\mathbf{r}, t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{\omega - k_z v_z - n\Omega} (J_n^2(a) + \\
&+ J_n(a)J_{n-1}(a) \exp i\theta + J_n(a)J_{n+1}(a) \exp(-i\theta) + \dots), \quad (\text{C.42})
\end{aligned}$$

где $a = k_x v_{\perp} / \Omega$. Подстановка (C.42) в (C.40) дает

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{q}{m} \phi_1 \left[2 \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} - \left(2(\omega - k_z v_z) \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2k_z(v_z - V) \frac{\partial f_0}{\partial \beta} + \frac{k_x}{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \right) \sum \frac{(J_n^2(a) + \dots)}{\omega - k_z v_z - n\Omega} \right]. \quad (\text{C.43})
\end{aligned}$$

Подставив это выражение для f_1 в уравнение (C.37), получим дисперсионное уравнение для электростатической волны в случае неоднородной плазмы:

$$\begin{aligned}
\left(k_x^2 + k_z^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi_1 &= \phi_1 \sum_j \frac{q_j^2}{\epsilon_0 m_j} \int \int \int \left[2 \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} - \right. \\
&\quad \left. - \left(2(\omega - k_z v_z) \frac{\partial f_0}{\partial \alpha} + 2k_z(v_z - V) \frac{\partial f_0}{\partial \beta} + \frac{ik_x}{\Omega} \frac{\partial f_0}{\partial \gamma} \right) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{J_n^2 + J_n J_{n-1} \exp i\theta + J_n J_{n+1} \exp(-i\theta)}{\omega - k_z v_z - n\Omega} + \dots \right]_j d\theta dv_{\perp} dv_z. \quad (\text{C.44})$$

Для $|(k_x^2 + k_z^2)\phi_1| \gg |\partial^2 \phi_1 / \partial x^2|$, (C.44) преобразуется к

$$(k_x^2 + k_z^2) - \sum_j \Pi_j^2 \frac{1}{n_{0j}} \int \int \int [\dots]_j d\theta dv_{\perp} dv_z = 0.$$

Так же как и в разд. С.3, это дисперсионное уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 \left[\frac{1}{v_{Tz}^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(b) e^{-b} \left(\frac{1}{v_{Tz}^2} - \frac{1}{v_{T\perp}^2} \frac{n\Omega}{\omega_n} \right) \zeta_n Z(\zeta_n) - \right. \\ \left. - \frac{1}{v_{T\perp}^2} \frac{n}{k_x} \left[(\epsilon + \delta_{\perp} - f_n(b)\delta_{\perp}) \left(1 + \frac{n\Omega}{\omega_n} \zeta_n Z(\zeta_n) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\delta_z}{2} \left(1 + \frac{n\Omega\omega_n}{k_z^2 v_{Tz}^2} (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{v_{Tz}^2} \frac{n}{k_x} \left[(\epsilon + \delta_z - f_n(b)\delta_{\perp}) (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\delta_z}{2} \left(1 + \frac{\omega_n^2}{k_z^2 v_{Tz}^2} (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{k_x}{\Omega} \left[(\epsilon - f_n(b)\delta_{\perp}) \frac{\zeta_n}{\omega_n} Z(\zeta_n) - \frac{\delta_z}{2} \frac{\omega_n}{k_z^2 v_{Tz}^2} (1 + \zeta_n Z(\zeta_n)) \right] \right]_j = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Здесь $y = 0$ и использованы соотношения

$$\omega_n = \omega - k_z V + n\Omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_n^2(b^{1/2}x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{x^2}{2} x dx = f_n(b) I_n(b) e^{-b},$$

$$f_n(b) \equiv (1 - b) + b I_n'(b) / I_n(b).$$

Если $\epsilon = \delta_{\perp} = \delta_z = 0$, то дисперсионное уравнение совпадает с (C.36).

В случае малых частот $\omega \ll |\Omega|$ имеем $\zeta_n \gg 1$ ($n \neq 0$), $\zeta_n Z(\zeta_n) \rightarrow -1$ ($n \neq 0$) и $1 + \zeta_n Z(\zeta_n) \rightarrow -(1/2)\zeta_n^{-2}$ ($n \neq 0$). Тогда (С.45) преобразуется к виду

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 \left(\frac{1}{v_{Tz}^2} + I_0(b)e^{-b} \left(\frac{1}{v_{Tz}^2} (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) - \frac{1}{v_{T\perp}^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{k_x}{\Omega\omega_0} (\epsilon - f_0(b)\delta_\perp) \zeta_0 Z(\zeta_0) - \frac{k_x}{\Omega\omega_0} \delta_z \zeta_0^2 (1 + \zeta_0 Z(\zeta_0)) \right) \right) = 0. \quad (C.46)$$

Здесь было учтено, что

$$\sum_{-\infty}^{\infty} I_n(b)e^{-b} = 1.$$

Положив $v_{T\perp} = v_{Tz} = v_T$, $\delta_\perp = \delta_z = 0$, $V = 0$, получаем дисперсионное уравнение для дрейфовой волны, обусловленной градиентом плотности:

$$k_x^2 + k_z^2 + \sum_j \Pi_j^2 \left(\frac{1}{v_T^2} + \right. \\ \left. + I_0(b)e^{-b} \left(\frac{1}{v_T^2} \zeta_0 Z(\zeta_0) + \frac{k_x}{\Omega\omega_0} \epsilon \zeta_0 Z(\zeta_0) \right) \right) = 0. \quad (C.47)$$

Напомним, что направление оси x противоположно скорости v_{de} электронного дрейфа, y — противоположно градиенту плотности, а z — вдоль магнитного поля. Обычно для электронов можно положить $b_e = 0$, тогда (С.47) дает

$$0 = (k_x^2 + k_z^2) \frac{v_{Te}^2}{\Pi_e^2} + 1 + \zeta_e Z(\zeta_e) \left(1 - \frac{\omega_e^*}{\omega} \right) + \\ + \frac{ZT_e}{T_i} \left(1 + I_0(b)e^{-b} \zeta_0 Z(\zeta_0) \left(1 - \frac{\omega_i^*}{\omega} \right) \right), \quad (C.48)$$

где

$$\omega_e^* = \frac{-k_x \epsilon v_{Te}^2}{\Omega_e} = \frac{-k_x \epsilon T_e}{eB}, \\ \omega_i^* = \frac{-k_x \epsilon v_{Ti}^2}{\Omega_i} = \frac{k_x \epsilon T_i}{ZeB}.$$

Физические константы, плазменные величины и математические формулы

c	скорость света в вакууме (определение)	$2,99792458 \cdot 10^8$ м/с
ϵ_0	диэлектрическая проницаемость вакуума	$8,8541878 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
μ_0	магнитная проницаемость вакуума	$1,25663706 \cdot 10^{-6}$ Гн/м ($= 4\pi \cdot 10^{-7}$)
h	(постоянная Планка)	$6,6260755(40) \cdot 10^{-34}$ Дж · с
k	(постоянная Больцмана)	$1,380658(12) \cdot 10^{-23}$ Дж/К
A	(число Авогадро)	$6,0221367(36) \cdot 10^{23}$ /моль (760 Торр, 0°C, 22,4 л)
e	(заряд электрона)	$1,60217733(49) \cdot 10^{-19}$ Кл
1	электрон-вольт (эВ)	$1,60217733(49) \cdot 10^{-19}$ Дж
m_p	(масса протона)	$1,6726231(10) \cdot 10^{-27}$ кг
m_e	(масса электрона)	$9,1093897(54) \cdot 10^{-31}$ кг
e/κ		11604 К/В
m_p/m_e		1836
$(m_p/m_e)^{1/2}$		42,9
$m_e c^2$		0,5110 МэВ

Величины в единицах СИ, $\kappa T/e$ в эВ, $\ln A = 20$, $10^{1/2} = 3,16$

$$\begin{aligned}
 \Pi_e &= \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right)^{1/2} = 5,64 \cdot 10^{11} \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{1/2}, & \frac{\Pi_e}{2\pi} &= 8,98 \cdot 10^{10} \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{1/2}, \\
 \Omega_e &= \frac{eB}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11} B, & \frac{\Omega_e}{2\pi} &= 2,80 \cdot 10^{10} B, \\
 -\Omega_i &= \frac{ZeB}{m_i} = 9,58 \cdot 10^7 \frac{Z}{A} B, & \frac{-\Omega_i}{2\pi} &= 1,52 \cdot 10^7 \frac{Z}{A} B,
 \end{aligned}$$

$$\nu_{ei\parallel} = \frac{1}{\tau_{ei\parallel}} = \frac{n_i Z^2 e^4 \ln A}{51,6\pi^{1/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T_e)^{3/2}} = 2,9 \cdot 10^9 Z^2 \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{-3/2} \frac{n_i}{10^{20}},$$

$$\nu_{ii\parallel} = \frac{1}{\tau_{ii\parallel}} = \frac{n_i Z^4 e^4 \ln A}{3^{1/2} 6\pi \epsilon_0^2 m_i^{1/2} (\kappa T_i)^{3/2}} = 0,18 \cdot 10^9 \frac{Z^4}{A^{1/2}} \left(\frac{\kappa T_i}{e} \right)^{-3/2} \frac{n_i}{10^{20}},$$

$$\nu_{ie}^{\epsilon} = \frac{Z^2 n_e e^4 \ln \Lambda}{(2\pi)^{1/2} 3\pi \epsilon_0^2 m_e^{1/2} (\kappa T_e)^{3/2}} \frac{m_e}{m_i} = 6,35 \cdot 10^6 \frac{Z^2}{A} \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{-3/2} \frac{n_e}{10^{20}}$$

$$\lambda_D = \left(\frac{\epsilon_0 \kappa T}{n_e e^2} \right)^{1/2} = 7,45 \cdot 10^{-7} \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{1/2} \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{-1/2},$$

$$\rho_{\Omega e} = 2,38 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{1/2} \frac{1}{B},$$

$$\rho_{\Omega i} = 1,02 \cdot 10^{-4} \frac{1}{Z} \left(\frac{A \kappa T_i}{e} \right)^{1/2} \frac{1}{B}$$

$$\lambda_{ei} = \left(\frac{3\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu_{ei\parallel}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^2 \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{-1},$$

$$\lambda_{ii} = \left(\frac{3\kappa T_i}{m_i} \right)^{1/2} \frac{1}{\nu_{ii\parallel}} = 0,94 \cdot 10^{-4} \frac{1}{Z^4} \left(\frac{\kappa T_i}{e} \right)^2 \left(\frac{n_i}{10^{20}} \right)^{-1},$$

$$v_A = \left(\frac{B^2}{\mu_0 n_i m_i} \right)^{1/2} = 2,18 \cdot 10^6 \frac{B}{(A n_i / 10^{20})^{1/2}},$$

$$v_{Te} = \left(\frac{\kappa T_e}{m_e} \right)^{1/2} = 4,19 \cdot 10^5 \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{1/2},$$

$$v_{Ti} = \left(\frac{\kappa T_i}{m_i} \right)^{1/2} = 9,79 \cdot 10^3 \left(\frac{\kappa T_i}{Ae} \right)^{1/2},$$

$$\eta_{\parallel} = \frac{Z e^2 m_e^{1/2} \ln \Lambda}{51,6\pi^{1/2} \epsilon_0^2 (\kappa T_e)^{3/2}} = 5,2 \cdot 10^{-5} Z \ln \Lambda \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{-3/2},$$

$$D_{cl} = \frac{m_e \kappa T_e}{e^2 B^2} \nu_{ei\perp} = 3,3 \cdot 10^{-2} \frac{Z}{B} \left(\frac{n}{10^{20}} \right) \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{-1/2},$$

$$D_B = \frac{1}{16} \frac{\kappa T_e}{eB},$$

$$\left(\frac{\Omega_e}{\Pi_e} \right)^2 = \frac{\epsilon_0 B^2}{m_e n_e} = \left(\frac{v_A}{c} \right)^2 \frac{m_i}{m_e} = \frac{\kappa T_e}{m_e c^2} \frac{2}{\beta_e} = 0,097 B^2 \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{-1},$$

$$N_{\lambda} \equiv \frac{4\pi}{3} n_e \lambda_D^3 = 1,73 \cdot 10^2 \left(\frac{\kappa T_e}{e} \right)^{3/2} \left(\frac{n_e}{10^{20}} \right)^{-1/2},$$

$$\beta = \frac{n\kappa T}{(B^2/2\mu_0)} = 4,03 \cdot 10^{-5} \frac{1}{B^2} \left(\frac{\kappa T}{e} \right) \left(\frac{n}{10^{20}} \right),$$

$$\left(\frac{v_{Te}}{v_A} \right)^2 = \frac{m_i}{2m_e} \beta_e,$$

$$\left(\frac{v_{Ti}}{v_A} \right)^2 = \frac{1}{2} \beta_i,$$

$$\left(\frac{v_A}{c} \right)^2 = \left(\frac{\lambda_D}{\rho \Omega_e} \right)^2 \frac{m_e n_e}{m_i n_i}.$$

Число $S \equiv \frac{\tau_R}{\tau_H} = \left(\frac{\mu_0 a^2}{\eta} \right) \left(\frac{B}{\mu_0 (n_i m_i)^{1/2} a} \right) = 2,6 \cdot 10^3 \frac{aB(\kappa T_e/e)^{3/2}}{ZA^{1/2}(n/10^{20})^{1/2}},$

$$\frac{D_B}{D_{cl}} = \frac{1}{16} \frac{\Omega_e}{\nu_{ei\perp}},$$

$$\frac{\Pi_e}{\nu_{ei\parallel}} = \frac{51,6\pi^{1/2}}{\ln \Lambda Z} n_e \lambda_D^3.$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) = \phi \nabla \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \phi,$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{a}) = \nabla \phi \times \mathbf{a} + \phi \nabla \times \mathbf{a},$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}),$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \times \mathbf{b},$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b},$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (\text{только в декартовых координатах}),$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0,$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = 3, \quad \nabla \times \mathbf{r} = 0,$$

$$\int_V \nabla \phi \cdot dV = \int_S \phi \mathbf{n} da,$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} da,$$

$$\int_V \nabla \times \mathbf{a} dV = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{a} da,$$

$$\int_S \mathbf{n} \times \nabla \phi da = \oint_C \phi ds,$$

$$\int_S \nabla \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} da = \oint_C \mathbf{a} \cdot ds.$$

Цилиндрические координаты (r, θ, z)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2,$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{i}_3,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_3}{\partial \theta} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial r} \right) \mathbf{i}_2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_3,$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты (r, θ, ϕ)

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{i}_3,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_1) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_3}{\partial \phi},$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_3) - \frac{\partial F_2}{\partial \phi} \right) \mathbf{i}_1 +$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_1}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_3) \right) \mathbf{i}_2 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F_2) - \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) \mathbf{i}_3,$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}.$$

Предметный указатель

(Числа обозначают разделы книги, латинские буквы — под-разделы)

Абсолютный минимум B , 8.1a, 17.3b
Адиабатический инвариант, 2.5
Адиабатический нагрев, 2.5
Альфвеновская волна 5.4, 10.4a
— компрессионная мода, 5.4, 10.4a
— крутильная мода, 5.4, 10.4a
Альфвеновская скорость, 5.4, 10.4a
Альфвеновские собственные моды, 14.2
Амбиполярная ловушка 17.3d
Аспектное отношение, 3.5
Баллонная сила, 6.3
Банана ширина, 3.5b, 7.2
Банановые траектории, 3.5b
Банановый режим, 7.2
Берштейновская волна, 12.4
Бесселевой функции модель, 17.1b
Бета, 6.1
Би-максвелловская (функция распределения), 12.3
Био—Савара закон, 3.1
Больцмана уравнение, 4.2
Большой радиус, 3.5
Бомовская диффузия, 7.3
Бутстрэп-ток, 16.8d
Быстрая волна, 10.2a
Векторный потенциал, 3.1
Винтовая неустойчивость, 8.1d, 8.3a(3)
Винтовая обмотка, 17.2a
Винтовая симметрия, 17.2a
Винтовая система, *см.* Стелларатор

Вириала теорема, 6.7
Вистлеры (свисты), 10.4e
Власова уравнение, 4.2
Внутренний (малый) срыв, 16.3
Вращательного преобразования угол, 3.5
— в винтовом поле, 17.2a
— в токамаке, 3.5, 16.4
Возбуждение волн, 12.0
Волн
— поглощение, 12.2
— распространение, 12.0, 12.2
Волны с отрицательной энергией, 13.3
Время
— диффузии в пространстве скоростей, 2.6
— Пастухова, 17.3d
— потерь, *см.* **Время удержания**
— релаксации энергетическое, 2.6
— столкновений, 2.6
— торможения ионного пучка, 2.6
— торможения, 2.6
— удержания
— — в амбиполярной ловушке, 17.3d
— — в каспе, 17.3a
— — в пробочной ловушке, 17.3a
— — в стеллараторе, 17.2d
— — в токамаке, 16.6, 16.7
— — энергии, 7.0, 16.6, 16.7, 17.2d, 17.3a, 17.3d
Вырожденная электронная плазма, 1.1
Вытянутость сечения плазмы, 16.4
Гамильтониан, 3.3
Гелиотрон/торсатрон, 17.2b
Генерация тока

- инъекцией нейтральных атомов, 2.6, 16.8с
- нижегибридными волнами, 16.8а
- переменным полем, 17.1d
- электронными циклотронными волнами, 16.8b
- Гибридный резонанс, 10.3, 12.5
- Главная ось, 3.5
- Градиентная (η_i)-мода, 8.6
- Градиентный дрейф, 2.4
- Гринвальда нормализованная плотность, 16.3
- Гринвальда—Хьюгилла—Мураками параметр, 16.3
- Групповая скорость, 12.1
- Грэда—Шафранова уравнение, 6.2
- Двухпоточковая неустойчивость**, 13.2
- Дебаевская длина (радиус), 1.2
- Дебаевское экранирование, 1.2
- Дефект массы, 1.3
- Диамagnetизм, 6.1, 6.3
- Дивертор, 16.5
- Динамического трения коэффициент, 16.8а
- Дисперсии закон
 - для горячей плазмы, 12.3, 12.4, 12.5, 12.6
 - для холодной плазмы, 10.1
 - электростатических волн, 13.1, 13.4, С.5, С.6
- Диффузии коэффициент, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4
- Диффузия классическая, 7.1а
- Диффузия в пространстве скоростей, 16.8а
- Диффузия, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4
- Диэлектрическая проницаемость, 3.1
- Длина свободного пробега, 6.1
- Дрейфера поле, 2.7
- Дрейфовая диссипативная неустойчивость, 9.2
- Дрейфовая неустойчивость, 9.2, С.6
- Дрейфовая поверхность, 3.6
- Дрейфовое приближение, 2.4
- Дрейфово-резистивная неустойчивость, 9.2
- Желобковая неустойчивость**, 8.1а
- Зажигания условие**, 1.3
- Запаса устойчивости коэффициент, 8.3а(3), 16.4
- Запертые частицы, *см.* Банановые траектории, 3.5b
- Имплозия**, 18.2
- Инерционное удержание, 18.1
- Инжекция быстрых нейтронов (ИБН), 2.6, 16.7
- ИНТОР, 16.11
- Ионные циклотронные волны, 10.4b
- Ионный циклотронный резонанс, 10.2b
- Иоффе палки, 17.3b
- ИТЭР (ITER), 15, 16.11
- Канонические переменные**, 3.3, 4.1
- Касп, 17.3а, 3.4
- Квазилинейная теория, 11.4
- Кожух проводящий, 15.2а, 16.10
- Конус потерь, 2.5, 17.3d
- Конусная неустойчивость, 17.3с
- Крампа функция, 12.3
- Круговая поляризация, 10.2а
- Крускала—Шафранова условие, 8.3а(3)
- Кулоновские столкновения, 2.6
- Кулоновский логарифм, 2.6
- Кэя—Голдстона скейлинг, 16.6
- L-волна**, 10.2а
- Лагранжев формализм, 3.3
- Лазерная плазма *см.* Инерционное удержание, 18
- Ландау затухание/усиление, 11.1, 12.3
- Лапласиан, 1.2
- Ларморовский радиус, 2.3
- Ленгмюровская волна, 2.2
- Линеаризованные МГД уравнения, 8.2
- Литиевый бланкет, 1.3

- Лиувилля теорема, 4.1
- Локальных мод устойчивость в торе, 17.1b
- Магнитная вязкость**, 5.3
- Магнитная диффузия**, 5.3
- Магнитная гидродинамика (МГД)**
- двухжидкостная, 5.1
 - одножидкостная, 5.2
- Магнитогидродинамическая**
- неустойчивость, 8.0
 - неустойчивость в токамаке, 16.3
- Магнитная ось**, 3.5
- Магнитная поверхность**, 3.2
- Магнитная спиральность**, 17.1b
- Магнитная яма**, 8.1b
- Магнитного поля индукция**, 3.1
- Магнитного поля напряженность**, 3.1
- Магнитное удержание**, 14
- Магнитное число Рейнольдса**, 5.3
- Магнитные флуктуации**, 7.4
- Магнитный зонд**, 16.1
- Магнитный момент**, 2.5
- Магнитозвуковые волны**, 5.4
- Макроскопическая неустойчивость**, 8.0
- Максвелла уравнения**, 3.1
- Максвелловская функция распределения**, 2.1
- Малая ось**, 3.5
- Малое решение**, 8.3c
- Малый радиус**, 3.5
- Малый срыв**, 16.3
- Медленная волна**, 10.2a
- Микронеустойчивость**, 13.0
- Минимум B**
- абсолютный, 8.1a, 17.3b,
 - как условие желобковой устойчивости, 8.1b
 - средний, 8.1b
- Нагрев**
- дополнительный в токамаке, 16.7
 - инъекцией нейтральных атомов, 2.6, 16.7
 - ионный циклотронный, 12.4
 - нижнегибридными волнами, 12.5
 - электронный циклотронный, 12.6
- Некруглое сечение**, 16.4
- Необыкновенная волна**, 10.2a
- Неоклассическая диффузия**
- в винтовом поле, 17.2c
 - в токамаке, 7.2
- Неоклассическая тиринг-мода**, 16.9
- Неустойчивость**
- баллонная, 8.5, 16.4 B.3
 - винтовая, 8.1d, 8.3a(3)
 - в пробочных ловушках, 17.3c
 - — зеркальная, 17.3c
 - двухпотоковая, 13.2
 - в пространстве скоростей, 13.0
 - дрейфовая диссипативная, 9.2
 - дрейфовая, 9.2, C.6
 - дрейфово-резистивная, 9.2
 - желобковая, 8.1a
 - конусная, 17.3c
 - на запертых частицах, 13.4
 - отрицательной массы, 17.3c
 - перестановочная, 8.1a
 - резистивная, 9.1
 - резистивной стенки (RWM), 16.10
 - свистовая (вистлер), 17.3c
 - сосисочная, 8.1c
 - срыва, 16.3
 - тиринг, 9.1
 - фишбон, 14.1
 - Харриса, 13.4
 - электронного пучка, 13.3
- Нижнегибридные волны**, см. Генерация тока нижнегибридными волнами, 16.8a
- см. Нагрев нижнегибридными волнами, 12.5
- Нулевой шир**, 17.1b
- Обращенный шир**, см. Отрицательный шир
- Обыкновенная волна**, 10.2a
- Ома закон**, 2.8
- Омический нагрев**, 2.8, 5.3

- Осевая симметрия, 3.2, 3.4, 6.2
 Операционные режимы токамака
 — Н-мода, 16.7
 — L-мода, 16.6
 — VH-мода, 16.7
 Открытые системы, 17.3
 Отрицательная диэлектрическая проницаемость, 13.3
 Отрицательной массы неустойчивость, 17.3с
 Отрицательный шир, 8.5, 16.7, 16.9d
 Отрицательных ионов источник, 16.7
 Отсечка, 10.2b
Парамагнетизм, 6.3
 Параметр идеальности, 1.2
 Пеллет-инжекция, 18.1
 Перезарядка, 2.6
 Перестановочная неустойчивость, 8.1a
 Перетяжки, 8.1с
 Переходное время, 11.2, 12.3
 Пинча с обращенным полем (RFP), 17.1
 — конфигурация, 17.1a
 — релаксация, 17.1b
 Плато режим, 7.2
 Плотность энергии волны в диспергирующей среде, 12.1
 Пойнтинга вектор, 12.1
 Полевая частица, 2.6
 Полоидальная бета, 6.3
 Полоидальное поле, 3.5
 Поляризации вектор, 10.1
 Поляризация, 10.2
 Поперечный адиабатический инвариант, 2.5
 Потери
 — конвективные, 7.3, 17.2d
 — радиационные, 1.3, 16.6
 — флуктуационные, 7.3
 Предел по бета, 6.5, 6.6, 16.4
 Преобразование мод, 12.0, 12.5
 Приграничный слой (SOL), 16.5
 Пробная частица, 2.6
 Пробочного удержания условие
 2.5, 17.3a
 Пробочное поле
 Продольный адиабатический инвариант, 2.5
 Пролетные частицы, 3.5a
 Проникновения нижнегибридной волны условие, 12.5
 Проницаемость магнитная, 3.1
 Пуассона уравнение, 3.2
 Пфирша—Шлютера
 — режим, 7.2
 — ток, 6.6
 — фактор, 7.1a
R-волна, 10.2
 Равновесия в токамаке условие,
 6.1, 6.2, 6.3, 16.2
 Разделение зарядов, 3.5, 7.1a
 Распыление, 16.5
 Реактор термоядерный, 1.3, 16.11
 Резистивная неустойчивость, 9.1
 Резистивной стенки неустойчивость (RWM), 16.10
 Резонанс, 10.2b
 Резонансное возбуждение, 12.0
 Релаксационные процессы, 17.1b
Сайдема критерий, 8.3с
 Самоиндукция плазменного кольца с током, 6.3
 Свистовая (вистлер) неустойчивость, 17.3с
 Сепаратриса, 16.5, 17.2
 Сечение, 2.6
 — кулоновских столкновений, 2.6
 — ядерного синтеза, 1.3
 Силовая линия, 3.2
 Сильно взаимодействующая плазма, 1.2
 Скалярный потенциал, 3.1
 СМА-диаграмма, 10.3
 Собственная альфвеновская мода,
 индуцированная тороидальностью (ТАЕ), 14.2
 Сосисочная неустойчивость, см.
 Перетяжки, 8.1с
 Средний минимум B , 8.1b
 Срыва неустойчивость, 16.3

- Стеллараторные(ый)
 — неоклассические потери, 17.2с
 — поля, 17.1а
 — предел по бета, 6.6
 — угол вращательного преобразования, 17.2а
 — установки, 17.2б
 — эксперименты по удержанию, 17.2д
 Стикса катушка, 12.4
 Столкновительная дрейфовая неустойчивость, 9.2
 Столкновительное время, 2.6
 Столкновительный режим, 7.2
 Супербананы, 17.2с
 Супершот, 16.7
 Сферический токамак, 15
- Тандемная ловушка, см. Амби-полярная ловушка
 Тензор диэлектрической проницаемости
 — горячей плазмы, 12.3, С.4
 — холодной плазмы, 10.1
 Дрейфовая скорость ведущего центра, 2.4
 — градиентного дрейфа, 2.4
 — в кривом поле, 2.4
 — в скрещенных E и B полях, 2.4
 Тепловая энергия плазмы, 1.3, 16.11
 Теплового баланса уравнение, 7.0, 15.6, А
 Тепловой поток, 7.0
 Теплопроводностные потери энергии, 7.0
 Теплопроводность, 7.0, 16.5
 Термобарьер, 17.3д
 Термоядерная плазма, 1.3
 Тиринг-неустойчивость, 9.1
 Токамак 16
 — МГД устойчивость, 16.3
 — неоклассическая диффузия, 7.2
 — полоидальное поле, 6.4
 — примесей контроль, 16.5
 — проводящий кожух, 16.2а
 — реактор, 16.11
 — скейлинг удержания, 16.6, 16.7
 — условие равновесия, 6.2, 16.2
 — установки, 16.1
 Торможение на электронах, 16.8с
 Тормозное излучение, 1.3
 Тороидальная собственная альфвеновская мода, 14.2
 Тороидальные координаты, 6.3
 Тороидальный дрейф, 3.5
 Торсатрон/гелиотрон, 17.2б
 Трансляционная симметрия, 3.3
 Трассирование, 12.2
 Треугольность поперечного сечения, 16.4, 16.11
 Тройона фактор, 16.4
- Убегающие электроны, 2.7
 Углеродные вставки, 16.5
 Удельное сопротивление, 2.8
 Удельный объем, 8.1б
 Уравнение(я)
 — Власова, 4.2
 — Грэда—Шафранова, 6.2
 — движения, 5.2, 5.2
 — магнитной гидродинамики (МГД)
 — — двухжидкостной, 5.1
 — — одножидкостной, 5.2
 — Максвелла, 3.1
 — непрерывности, 5.1
 — Пойнтинга, 12.1
 — Пуассона, 3.2
 — равновесия в осесимметричной системе, 6.2
 — теплового баланса уравнение, 7.0, 16.6, А
 — Фоккера—Планка, 4.2
 — Эйлера, 8.3
 Уэйра пинч, 3.7
- Ферми ускорение, 2.5
 Фишбон-неустойчивость, 14.1
 Фоккера—Планка столкновительный член, 4.1, 4.2
 Функция распределения би-максвелловская, 12.3
 Функция распределения в пространстве скоростей, 2.1, 4.1

- Харриса неустойчивость**, 13.4
Холодная плазма, 10.1
Хольраум, 18.2
- Циклотронное затухание**, 11.3, 12.3
Циклотронный резонанс, 10.4b
- Частота**
— верхнегибридная резонансная, 10.4d
— дрейфовая ионная и электронная, 8.6
— ионная циклотронная, 12.4
— нижнегибридная резонансная, 10.4c
— плазменная электронная, 2.2, 10.1
— столкновений, 2.6
— столкновений, эффективная, 7.2
— циклотронная, 2.3, 10.1
- Шафранова смещение**, 8.5
Шир, 8.3c
Шировый поток, 16.7
- Эйлера уравнение**, 8.3
Электрического поля индукция, 3.1
Электрического поля напряженность, 3.1
Электрическое сопротивление, 2.8
Электронного пучка неустойчивость, 13.3
Электронные плазменные волны, 2.2
Электронные циклотронные волны, 10.4e
Электронный циклотронный нагрев, 12.6
Электронный циклотронный резонанс, 10.3
Электростатические волны, 10.5, 12.5, С.5, С.6
Эллиптическая обмотка, 17.2b
Энергетический принцип, 8.2b
Энергии интеграл, 8.2b, В.1, В.2, В.3
Эрмитова матрица, 12.1
Эрмитов оператор, 8.2b

Кенро Миямото

ОСНОВЫ ФИЗИКИ ПЛАЗМЫ И УПРАВЛЯЕМОГО СИНТЕЗА

